

質問

排反と独立の違いを教えてください！

回答

(1) A と B が排反であるとは

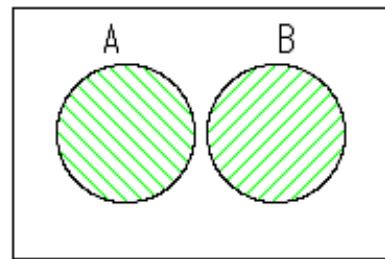
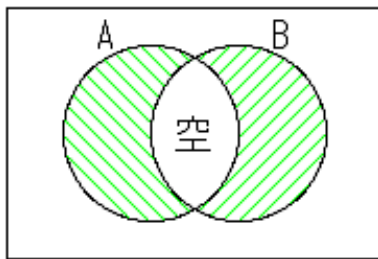
A が B を (B も A を) 排除している

すなわち

$$P(A \cap B) = 0$$

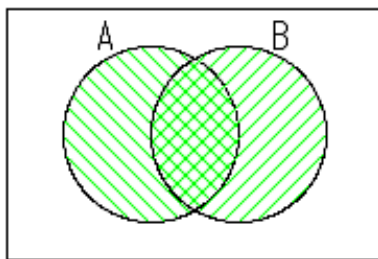
のことを言います。

ベン図で表すと



すなわち

排反でないときは、このようになります。



A と B が排反のとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(2) A と B が独立であるとは

B は A の (A も B の) 影響を受けない

すなわち

(i) A であるときも, A でないときも, B は同じ確率である.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \quad (\text{または } P(A) = 0, 1)$$
$$P(A \cap B)P(\bar{A}) = P(\bar{A} \cap B)P(A) \quad \dots \textcircled{1} \quad (P(A) = 0, 1 \text{ の場合も含む})$$

(ii) A であるときも, B はいつもと同じ確率である.

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B) \quad (\text{または } P(A) = 0)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \quad \dots \textcircled{2} \quad (P(A) = 0 \text{ の場合も含む})$$

(iii) A でないときも, B はいつもと同じ確率である.

$$\frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = P(B) \quad (\text{または } P(A) = 1)$$
$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B) \quad \dots \textcircled{3} \quad (P(A) = 1 \text{ の場合も含む})$$

ということです。

①,②,③は同値なので, ②を(形式的な)定義とすることが多いです。(形式的な)定義を見ただけでは「独立」の雰囲気はわかりにくいですね。

独立かどうかを表すには, ベン図に代わって, つぎのような図を使います.

- (i) 1×1 の正方形を横の線で区切って, 上側の長方形の面積が $P(A)$ (下側の長方形の面積が $P(\bar{A})$) となるようにします.
- (ii) 上側の長方形を縦の線で区切って, 左側の長方形の面積が $P(A \cap B)$ (右側の長方形の面積が $P(A \cap \bar{B})$) となるようにします.
- (iii) 下側の長方形を縦の線で区切って, 左側の長方形の面積が $P(\bar{A} \cap B)$ (右側の長方形の面積が $P(\bar{A} \cap \bar{B})$) となるようにします.

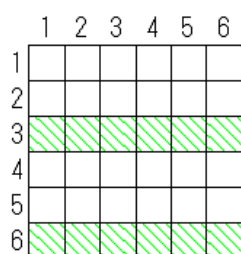
A と B が独立のとき, またそのときに限って, (ii) と (iii) の縦線が一直線になります.

独立の例

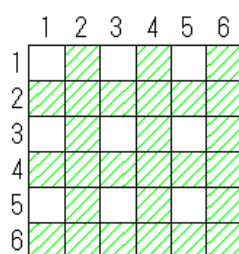
さいころを2回振る.

事象 A : 1回目の目が3で割り切れる

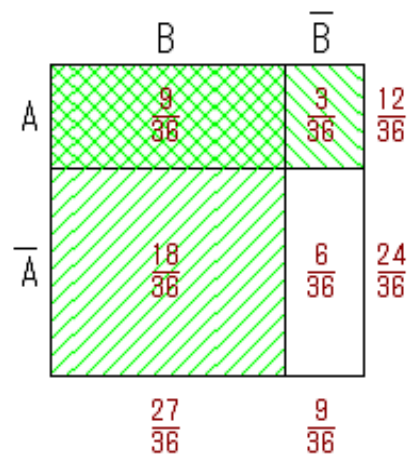
事象 B : 2つの目の積が2で割り切れる



事象 A



事象 B

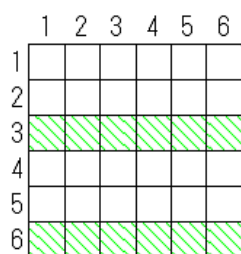


独立でない例

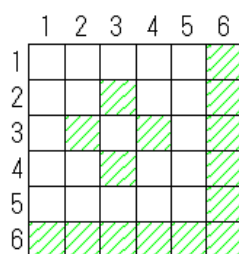
さいころを2回振る.

事象 A : 1回目の目が3で割り切れる

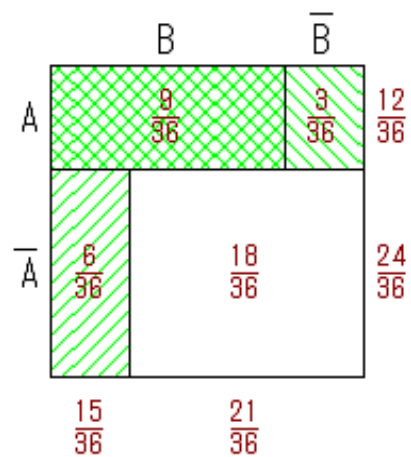
事象 B : 2つの目の積が6で割り切れる



事象 A



事象 B



A と B が独立のとき

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$