質問

(¬ p ∨ ¬ q) → ¬(p ∧ q) がトートロジーであることを，ラッセル-ヒルベルトの公理系において証明してください．真理表を用いれば非常に簡単なのは分かるのですが、この制約下では証明できません

回答

長い式になるので，次のように省略します。

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \neg p \\
P &\equiv p \wedge q \rightarrow p \\
Q &\equiv p \wedge q \rightarrow \neg p \\
R &\equiv \neg(p \wedge q)
\end{aligned}
$$

∧ の公理：$\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$

$$
\begin{aligned}
& p \wedge q \rightarrow p \\
& \therefore\ P \qquad \cdots ①
\end{aligned}
$$

→ の公理：$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

$$
\begin{aligned}
& \neg p \rightarrow (p \wedge q \rightarrow \neg p) \\
& \therefore\ A \rightarrow Q \qquad \cdots ②
\end{aligned}
$$

¬ の公理：$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi)$

$$
\begin{aligned}
& (p \wedge q \rightarrow p) \rightarrow ((p \wedge q \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg(p \wedge q)) \\
& \therefore\ P \rightarrow (Q \rightarrow R) \qquad \cdots ③
\end{aligned}
$$

→ の公理：$(\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

$$
\begin{aligned}
& (A \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))) \rightarrow ((A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow (Q \rightarrow R))) \qquad \cdots ④ \\
& (A \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((A \rightarrow Q) \rightarrow (A \rightarrow R)) \qquad \cdots ⑤
\end{aligned}
$$

→ の公理：$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

$$
\begin{aligned}
& (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (A \rightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))) \qquad \cdots ⑥ \\
& P \rightarrow (A \rightarrow P) \qquad \cdots ⑦
\end{aligned}
$$

③,⑥,④ より

$$
(A \rightarrow P) \rightarrow (A \rightarrow (Q \rightarrow R)) \qquad \cdots ⑧
$$

①,⑦,⑧,⑤ より

$$
(A \rightarrow Q) \rightarrow (A \rightarrow R) \qquad \cdots ⑨
$$

②,⑨ より

$$A \to R \qquad \cdots ⑩$$

$$\therefore\ \neg p \to \neg(p \land q) \qquad \cdots ⑪$$

同様にして

$$\neg q \to \neg(p \land q) \qquad \cdots ⑫$$

$\lor$ の公理：$(\phi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\phi \lor \psi \to \chi))$

$$(\neg p \to \neg(p \land q)) \to ((\neg q \to \neg(p \land q)) \to (\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q))) \qquad \cdots ⑬$$

⑪,⑫,⑬ より

$$\neg p \lor \neg q \to \neg(p \land q)$$