1　包絡線

1.1　その 1

作業 1 方眼用紙を横長に置いて次の作業をする．

(1) 方眼の一番下の横の線を x 軸，中央付近の縦の線を y 軸とする．

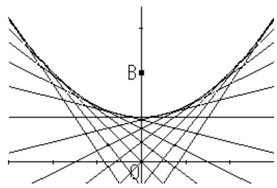
(2) y 軸上の定点 $\mathrm{B}(0,2)$ に印をつける．

(3) x 軸上の点 $\mathrm{A}_k(k,0)$ $(k=-5,-4,\ldots,4,5)$ に印をつける．

(4) 点 A_k が B に重なるように紙を折って，折り目をつける（11 本）．
折り目が通る部分（下方）と，折り目が通らない部分（上方）の境界が曲線のように見える．

このことから，次の問題が考えられる．

例題 1 点 $\mathrm{A}(t,0)$ が x 軸上全体を動くとき，A を $\mathrm{B}(0,2)$ に重ねるように折った折り目の直線が通る範囲を不等式で示せ．



この問題の解答を 3 通り示す．

折り目の方程式

どの解答にも必要な折り目の直線の方程式を求める．
折り目 ℓ は，線分 AB の垂直二等分線である．

$$\text{AB の中点は}\left(\frac{t}{2},1\right)\text{，傾きは}\frac{-2}{t}$$

ゆえに，ℓ は

$$y=\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}+1 \tag{1}$$

1.1.1　解答 1

考え方

xy 平面上の各点 $\mathrm{P}(x, y)$ について，折り目が通る条件を考える．

点 $\mathrm{P}(x, y)$ を通る折り目 ℓがあると
$\iff$ (1) を満たす t がある
$\iff$ (1) を t についての 2 次方程式とみたとき，それが実数解 t をもつ

解答

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} + 1 \tag{1}$$

(1) を，t について整理すると

$$t^2 - 2xt + 4(y-1) = 0$$

これが実数解をもつから，判別式より

$$x^2 - 4(y-1) \geqq 0$$
$$y \leqq \frac{1}{4}x^2 + 1 \qquad \text{(答)}$$

1.1.2　解答 2

考え方

各 x について，y が取り得る値の範囲を調べる．

(1) を，x が定数，t が変数の関数とみて，値域を求める．

解答

$$y = \frac{t}{2}x - \frac{t^2}{4} + 1 \tag{1}$$

(1) の右辺を t について整理すると

$$y = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}xt + 1 = -\frac{1}{4}(t-x)^2 + \frac{1}{4}x^2 + 1$$

ゆえに，y が取り得る値の範囲は

$$y \leqq \frac{1}{4}x^2 + 1 \qquad \text{(答)}$$

1.1.3　解答 3

考え方

境界線 $y=f(x)$ はすべての ℓ に接する曲線である．逆に言うと，ℓ は $y=f(x)$ の接線である． $y=f(x)$ の接線の方程式 $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$ と (1) の係数を比べる．

解答

$$y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}+1 \tag{1}$$

$y=f(x)$ 上の点 (X,Y) における接線の方程式は

$$y=Y'(x-X)+Y=Y'x-XY'+Y \qquad \left(\text{ただし}, Y'=f'(X)\right)$$

これと (1) の係数を比べる

$$Y'=\frac{1}{2}t \tag{2}$$
$$XY'-Y=\frac{1}{4}t^2-1 \tag{3}$$

注: t は X によって 1 つ定まるので，X の関数である

(2) を X で微分する

$$Y''=\frac{1}{2}t' \tag{2'}$$

(3) を X で微分する

$$Y'+XY''-Y'=\frac{1}{2}tt'$$
$$XY''=\frac{1}{2}tt' \tag{3'}$$

(2')(3') より Y'' を消去する

$$Xt'=tt'$$

t は X によって異なり，定数ではないから $t'=0$ ではない

$$\therefore\ X=t \tag{4}$$

(4) を (1) に代入して Y を t で表す

$$Y=\frac{t^2}{2}-\frac{t^2}{4}+1=\frac{1}{4}t^2+1 \tag{5}$$

t を媒介変数とする媒介変数表示が得られた

$$\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{1}{4}t^2+1 \end{cases} \tag{6}$$

t が消去できる場合は消去する

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \tag{7}$$

したがって，ℓ が通過する領域は

$$y \leqq \frac{1}{4}x^2 + 1 \tag{答}$$

定義 1　ある直線群のすべての直線と接する曲線を，その直線群の**包絡線**という．

1.2　その 2

作業 2 作業 1 で使った方眼用紙を，上下逆にして使う．

(1) y 軸は同じ直線（ただし逆向き）とし，x 軸はまた一番下の線とする．

(2) $y = x$ 上に点 $\mathrm{A}_k\,(0.2k,\ 0.2k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$ をとる．

(3) $y = -x$ 上に点 $\mathrm{B}_k\,(-0.2k,\ 0.2k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$ をとる．

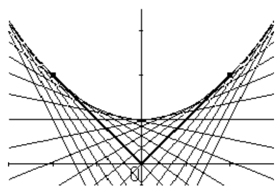
(4) A_k と B_{10-k} を結ぶ直線を描く（11 本）．
包絡線が浮かび上がる．

(5) 作業 1 の x 軸と作業 2 の x 軸が重なるように紙を折って，2 つの包絡線が一致することを確認しなさい．

問題 2 t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{A}(t, t)$ と $\mathrm{B}(t-2, 2-t)$ を結ぶ直線が通る範囲を不等式で表せ．

3 通りの解答を示しなさい．

注 1 A, B は $\mathrm{OA} + \mathrm{OB} = \sqrt{2}$ (一定) を満たしながら動く．



1.3　その3

作業 3 作業 2 の方眼用紙で，左端を y 軸，下端を x 軸とし，5cm を 1 とする．

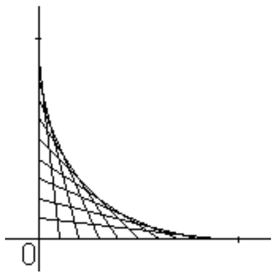
(1)　x 軸上に $\mathrm{A}_k(0.1k,\ 0)$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$ をとる．

(2)　y 軸上に $\mathrm{B}_k(0,\ 0.1k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 10)$ をとる．

(3)　A_k と B_{10-k} を結ぶ直線を描く（11 本）．
包絡線が浮かび上がる．

問題 3 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動く．点 $\mathrm{A}(t, 0)$ と $\mathrm{B}(0, 1-t)$ を結ぶ線分すべてに接する曲線（包絡線）の方程式を求めよ．

注 2 A, B は $\mathrm{OA} + \mathrm{OB} = 1$ (一定) を満たしながら動く．問題 1 と同様であるから，この曲線も放物線（45° 傾いている）である．



1.4　その4

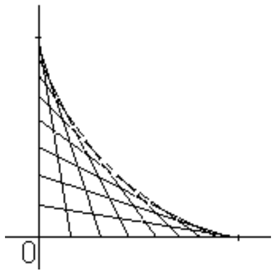
作業 4 作業 2 の方眼用紙で，左端を y 軸，下端を x 軸とし，5cm を 1 とする．

(1)　x 軸上の点 A と y 軸上の点 B を，$\mathrm{AB} = 5\mathrm{cm}$ となるようにとり，A と B を結ぶ．

(2)　(1) を繰り返して線を 10 本引く．
包絡線が浮かび上がる．

問題 4 θ が $0° \leqq \theta \leqq 90°$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{A}(\cos\theta, 0)$ と $\mathrm{B}(0, \sin\theta)$ を結ぶ線分の包絡線の方程式を求めよ．

注 3 A, B が $\mathrm{AB} = 1$ (一定) を満たしながら動く．



定義 2 この曲線を星芒形 **(asteroid)** という．

注 4 半径 1 の円の内側を，半径 $\dfrac{1}{4}$ の円が一周するときの内サイクロイドと同じ．

1.5　その 5

作業 5 コピー用紙の中心を原点, 原点を通り長辺に平行な直線を x 軸，短辺に平行な直線を y 軸とする．

(1) 原点を中心として半径 4cm の円を描く．

(2) x 軸上に点 F をとる．

(3) 円周上に点 P をとり点 F に重なるように折って折り目を付ける．

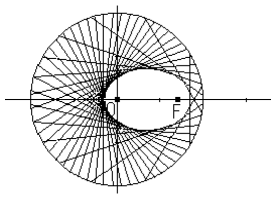
(4) (3) を繰り返す．

包絡線が浮かび上がる．

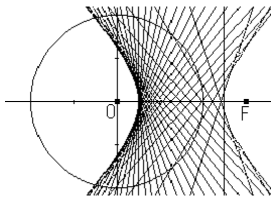
注 5 点 F の所に小さい穴を空けて，穴が円周の上に来るように折ると，作業しやすい．

注 6 OF = 3cm（円の内部）と，OF = 6cm（円の外部）と 2 通りやりなさい．

問題 5 e を $0 < e < 1$ または $1 < e$ の定数とし，x 軸上に定点 F$(2e,\ 0)$ をとる．中心が原点で半径が 2 の円 C の周上を動く動点 P が定点 F に重なるように折った折り目の包絡線の方程式を求めよ．



定義 3
$0 < e < 1$（F が円の内部）のとき**楕円**という．
$1 < e$（F が円の外部）のとき**双曲線**という．
e をその曲線の**離心率**という．



1.6　幾何的考察

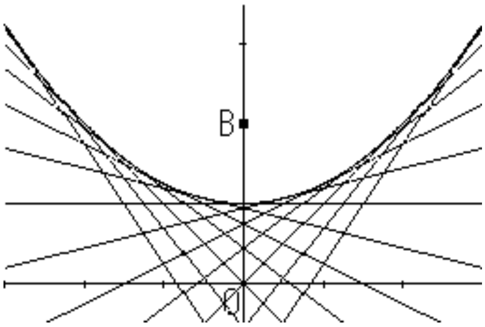
作業 1，作業 5（$0 < e < 1$），作業 5（$1 < e$）の包絡線について幾何学的に説明する．

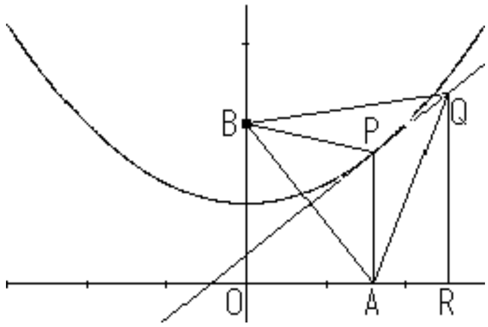
1.6.1　作業 1

この包絡線は，x 軸を準線，点 B$(0, 2)$ を焦点にもつ放物線 C になる．すなわち，つぎのような性質をもつ点 P の軌跡である．

放物線の性質　点 P から，焦点（B）までの距離と準線（x 軸）までの距離が等しい．

$$\mathrm{PB} = \mathrm{PH} \quad (\text{H は P から } x \text{ 軸に下ろした垂線の足})$$





x 軸上の任意の点を A とし，AB の垂直二等分線 ℓ とする．
点 A を通り x 軸に垂直な直線と ℓ との交点を P とする．
三角形 PAB は二等辺三角形である．

$$\therefore\ \mathrm{PB} = \mathrm{PA}$$

ゆえに，P は放物線 C 上にある．
ℓ 上の P 以外の点 Q について，Q から x 軸に下ろした垂線の足を R とする．

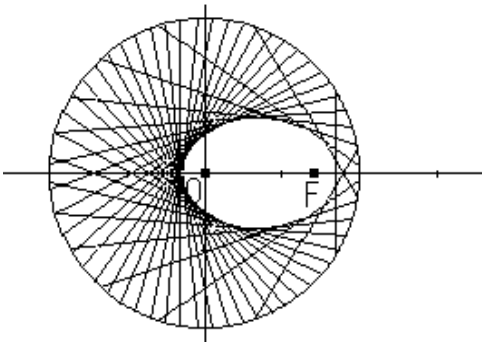
$$\mathrm{QB} = \mathrm{QA} > \mathrm{QR}$$

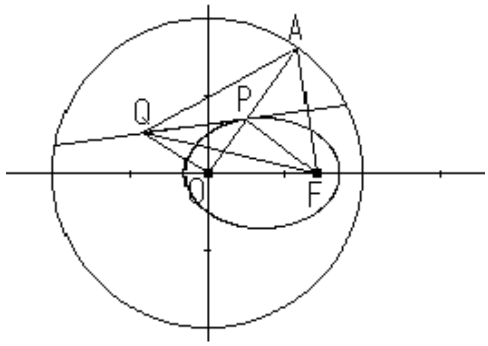
ゆえに，Q は放物線 C より下にある．

1.6.2　作業 2（$0 < e < 1$）

この包絡線は，2 点 O(0, 0), F(2e, 0) を焦点にもち長径が 2（円の半径）の楕円 C になる．すなわち，つぎのような性質をもつ点 P の軌跡である．

楕円の性質　点 P から 2 つの焦点（O, F）までの距離の和が一定（2）である． $$\mathrm{OP} + \mathrm{FP} = 2$$





円周上の任意の点を A とし，AF の垂直二等分線を ℓ とする．
半径 OA と ℓ との交点を P とする．
三角形 PFA は二等辺三角形である．

$$\therefore\ \mathrm{OP} + \mathrm{FP} = \mathrm{OP} + \mathrm{PA} = \mathrm{OA} = 2$$

ゆえに，P は楕円 C 上にある．
ℓ 上の P 以外の点 Q について，

$$\mathrm{OQ} + \mathrm{FQ} = \mathrm{OQ} + \mathrm{QA} > \mathrm{OA} = 2$$

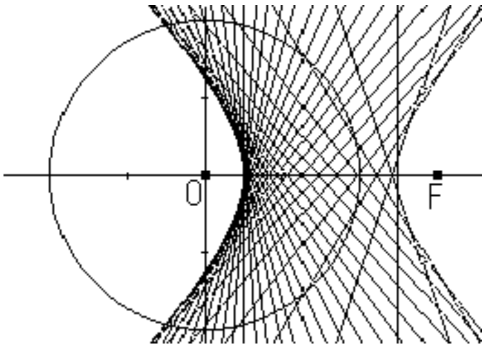
ゆえに，Q は楕円 C の外部にある．

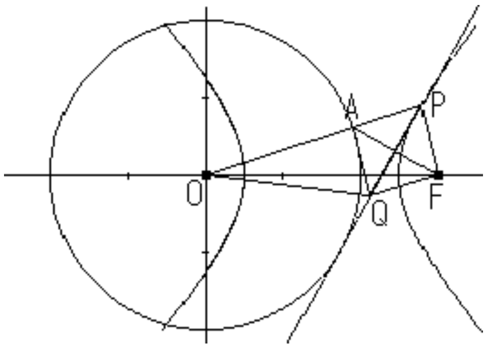
1.6.3　作業 3（$1 < e$）

この包絡線は，2 点 O(0, 0), F(2e, 0) を焦点にもち 2 頂点の距離が 2（円の半径）の双曲線 C になる．すなわち，つぎのような性質をもつ点 P の軌跡である．

双曲線の性質　点 P から 2 つの焦点（O, F）までの距離の差が一定（2）である．

$$|\mathrm{OP} - \mathrm{FP}| = 2$$





円周上の任意の点を A とし，AF の垂直二等分線を ℓ とする．
半径 OA と ℓ との交点を P とする．
三角形 PFA は二等辺三角形である．

$$\therefore\ |\mathrm{OP} - \mathrm{FP}| = |\mathrm{OP} - \mathrm{PA}| = \mathrm{OA} = 2$$

ゆえに，P は双曲線 C 上にある．
ℓ 上の P 以外の点 Q について，

$$|\mathrm{OQ} - \mathrm{FQ}| = |\mathrm{OQ} - \mathrm{QA}| < \mathrm{OA} = 2$$

ゆえに，Q は双曲線 C の内側（双曲線の中心がある側）にある．