1　包絡線　解答

問題 2 t が実数全体を動くとき，点 $\mathrm{A}(t, t)$ と $\mathrm{B}(t-2, 2-t)$ を結ぶ直線が通る範囲を不等式で表せ.

解答 1

$$\text{直線 AB}:\ y=(t-1)(x-t)+t=(t-1)x-t^2+2t \tag{1}$$

t について整理する

$$t^2-(x+2)t+x+y=0 \tag{2}$$

これが実数解をもつための条件だから

$$\begin{aligned}
&(x+2)^2-4(x+y) \geqq 0\\
&x^2-4y+4 \geqq 0\\
&\therefore\ y \leqq \frac{1}{4}x^2+1 && \text{(答)}
\end{aligned}$$

解答 2

$$\text{直線 AB}:\ y=(t-1)x-t^2+2t \tag{1}$$

右辺を t について整理する

$$\begin{aligned}
&y=-t^2+(x+2)t-x=-\left(t-\frac{1}{2}x-1\right)^2+\frac{1}{4}x^2+1\\
&\therefore\ y \leqq \frac{1}{4}x^2+1 && \text{(答)}
\end{aligned}$$

解答 3

$$\text{直線 AB}:\ y=(t-1)x-t^2+2t \tag{1}$$

接線: $y=Y'x-XY'+Y$ と係数比較する

$$Y'=t-1 \tag{2}$$
$$XY'-Y=t^2-2t \tag{3}$$

(2)(3) を X で微分

$$Y''=t' \tag{2'}$$
$$XY''=2(t-1)t' \tag{3'}$$
$$\therefore\ X=2(t-1) \tag{4}$$

(1) に代入

$$Y=2(t-1)^2-t^2+2t=t^2-2t+2=(t-1)^2+1=\frac{1}{4}X^2+1 \tag{5}$$
$$\therefore\ y \leqq \frac{1}{4}x^2+1 \qquad \text{(答)}$$

問題 3 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動く．点 $\mathrm{A}(t, 0)$ と $\mathrm{B}(0, 1-t)$ を結ぶ線分の包絡線の方程式を求めよ．

解答 1

$$\mathrm{AB}:\ y = \frac{t-1}{t}x + 1 - t$$

t で整理する

$$t^2 + (y-x-1)t + x = 0$$

実数解をもつ条件より

$$\begin{aligned}
&(y-x-1)^2 - 4x \geqq 0\\
&y^2 - 2(x+1)y + (x+1)^2 - 4x \geqq 0\\
&y \leqq x + 1 - 2\sqrt{x}\ ,\quad x + 1 + 2\sqrt{x} \leqq y
\end{aligned}$$

これは t が実数全体を動くときの通過領域である
$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$

$$\begin{aligned}
&0 \leqq y \leqq x + 1 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{x}-1)^2 \quad (0 \leqq x \leqq 1)\\
&\therefore y = (\sqrt{x}-1)^2 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

注 1 これを続けて

$$\begin{aligned}
&\sqrt{y} = 1 - \sqrt{x}\\
&\therefore\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

解答 2

$$\mathrm{AB}:\ y = \frac{t-1}{t}x + 1 - t$$

右辺を t で整理する

$$y = -\left(t + \frac{x}{t}\right) + x + 1$$

相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}
&y \leqq -2\sqrt{t \cdot \frac{x}{t}} + x + 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x}-1)^2\\
&\therefore y = (\sqrt{x}-1)^2 \qquad \text{(答)}
\end{aligned}$$

解答 3

$$\mathrm{AB}:\ y=\frac{t-1}{t}x+1-t$$

接線: $y=Y'x-XY'+Y$ と係数比較

$$Y'=1-\frac{1}{t}$$
$$XY'-Y=t-1$$

X で微分

$$Y''=\frac{1}{t^2}\ t'$$
$$XY''=t'$$

ゆえに

$$X=t^2$$
$$Y=(t-1)t+1-t=(t-1)^2=(\sqrt{X}-1)^2$$
$$\therefore y=(\sqrt{x}-1)^2 \qquad \text{(答)}$$

問題 4 θ が $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，点 $\mathrm{A}(\cos\theta, 0)$ と $\mathrm{B}(0, \sin\theta)$ を結ぶ線分の包絡線の方程式を求めよ．

解答 1

$$\mathrm{AB}:\ y = -(\tan\theta)x + \sin\theta$$

右辺を $f(\theta)$ とおく

$$f(\theta) = -x\tan\theta + \sin\theta$$
$$f'(\theta) = -\frac{x}{\cos^2\theta} + \cos\theta = \frac{\cos^3\theta - x}{\cos^2\theta}$$

$\cos\theta = x^{\frac{1}{3}}$ のとき最大になり，このとき

$$x = \cos^3\theta$$
$$y = -\tan\theta\cos^3\theta + \sin\theta = \sin\theta(1 - \cos^2\theta) = \sin^3\theta$$

θ を消去すると

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \text{(答)}$$

解答 2

$$\mathrm{AB}:\ y = -(\tan\theta)x + \sin\theta$$

$y = Y'x - XY' + Y$ と比較

$$Y' = -\tan\theta$$
$$XY' - Y = -\sin\theta$$

微分する

$$Y'' = -\frac{\theta'}{\cos^2\theta}$$
$$XY'' = -\cos\theta\ \theta'$$

ゆえに

$$X = \cos^3\theta$$
$$Y = -\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta = \sin\theta(1 - \cos^2\theta) = \sin^3\theta$$

したがって

$$\begin{cases} x = \cos^3\theta \\ y = \sin^3\theta \end{cases} \qquad \text{(媒介変数表示)}$$
$$\therefore\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1 \qquad \text{(答)}$$

問題 5 e を $0<e<1$ または $1<e$ の定数とし，x 軸上に定点 $\mathrm{F}(2e,\ 0)$ をとる．中心が原点で半径が 2 の円 C の周上を動く動点 P が定点 F に重なるように折った折り目の包絡線の方程式を求めよ．

解答 1

$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ とおく．
折り目 ℓ は，FP の垂直二等分線である．

$$\ell:\ y=-\frac{\cos\theta-e}{\sin\theta}(x-\cos\theta-e)+\sin\theta=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}x-\frac{e^2-1}{\sin\theta}$$

θ について整理する．

$$x\cos\theta+y\sin\theta=ex+1-e^2$$

θ が存在する条件より

$$x^2+y^2\geqq(ex+1-e^2)^2=e^2x^2+2e(1-e^2)x+(1-e^2)^2$$
$$(1-e^2)(x-e)^2+y^2\geqq 1-e^2$$

$0<e<1$ のとき

$$(x-e)^2+\frac{y^2}{1-e^2}\geqq 1 \qquad\text{(楕円)}$$

$1<e$ のとき

$$(x-e)^2-\frac{y^2}{e^2-1}\leqq 1 \qquad\text{(双曲線)}$$

注 2 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$ を満たす θ が存在する条件は，$a^2+b^2\geqq c^2$ ．

解答 2

$\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ とおく．
折り目 ℓ は，FP の垂直二等分線である．

$$\ell:\ y=-\frac{\cos\theta-e}{\sin\theta}(x-\cos\theta-e)+\sin\theta=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}x-\frac{e^2-1}{\sin\theta}$$

接線 $y=Y'x-XY'+Y$ と比較

$$Y'=\frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$XY'-Y=\frac{e^2-1}{\sin\theta}$$

X で微分

$$Y''=\frac{\sin^2\theta-(e-\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}\ \theta'=\frac{1-e\cos\theta}{\sin^2\theta}\theta'$$
$$XY''=-\frac{(e^2-1)\cos\theta}{\sin^2\theta}\theta'=\frac{(1-e^2)\cos\theta}{\sin^2\theta}\theta'$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{(1-e^2)\cos\theta}{1-e\cos\theta} \\
Y &= \frac{e-\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{(1-e^2)\cos\theta}{1-e\cos\theta} - \frac{e^2-1}{\sin\theta} = \frac{(1-e^2)(e\cos\theta-\cos^2\theta+1-e\cos\theta)}{\sin\theta(1-e\cos\theta)} \\
&= \frac{(1-e^2)\sin\theta}{1-e\cos\theta}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{(1-e^2)\cos\theta}{1-e\cos\theta} \\
y = \dfrac{(1-e^2)\sin\theta}{1-e\cos\theta}
\end{cases}
\qquad \text{(媒介変数表示)}
$$

$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくと

$$
r = \frac{1-e^2}{1-e\cos\theta} \qquad \text{(極方程式)}
$$

また

$$
\begin{aligned}
x-e &= \frac{(1-e^2)\cos\theta - e(1-e\cos\theta)}{1-e\cos\theta} = \frac{\cos\theta - e}{1-e\cos\theta} \\
(x-e)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} &= \frac{(\cos\theta - e)^2 + (1-e^2)\sin^2\theta}{(1-e\cos\theta)^2} = \frac{1-2e\cos\theta + e^2\cos^2\theta}{(1-e\cos\theta)^2} = 1
\end{aligned}
$$

$0 < e < 1$ のとき

$$
(x-e)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = 1 \qquad \text{(楕円)}
$$

$1 < e$ のとき

$$
(x-e)^2 - \frac{y^2}{e^2-1} = 1 \qquad \text{(双曲線)}
$$