1　百五減算

百五減算は次のような数当てパズルである。

(先生)	2 桁の数をひとつ考えてください。 3 つのヒントを手がかりにして，それを当てようと思います。
(生徒)	はい，考えました。
(先生)	3 で割った余りを教えてください。
(生徒)	2 です。
(先生)	5 で割った余りを教えてください。
(生徒)	3 です。
(先生)	7 で割った余りを教えてください。
(生徒)	4 です。
(先生)	えーと，⋯，53 ですね。
(生徒)	そうです。すごい。なんでわかるんですか。

3 つのキーナンバー K_3, K_5, K_7 を使うと簡単に当てることができる。

$$\begin{aligned} K_3 &= \text{(3 で割ると 1 余り, 5 と 7 で割り切れる数)} &= 70 \\ K_5 &= \text{(5 で割ると 1 余り, 3 と 7 で割り切れる数)} &= 21 \\ K_7 &= \text{(7 で割ると 1 余り, 3 と 5 で割り切れる数)} &= 15 \end{aligned}$$

n を $3, 5, 7$ で割った余りをそれぞれ r_3, r_5, r_7 とすると

$K_3 \times r_3$は 3 で割ると r_3余り, 5 と 7 で割り切れる

$K_5 \times r_5$は 5 で割ると r_5余り, 3 と 7 で割り切れる

$K_7 \times r_7$は 7 で割ると r_7余り, 3 と 5 で割り切れる

ゆえに

$$N = K_3 \times r_3 + K_5 \times r_5 + K_7 \times r_7$$

は $3, 5, 7$ で割った余りがそれぞれ r_3, r_5, r_7 になる。しかし，N は 2 桁になるとは限らず，一般にもっと大きい数になる。N から $3, 5, 7$ の最小公倍数 105 を引いても $3, 5, 7$ で割った数は変わらない。ゆえに，N から 105 を引けるだけ引いた数，すなわち 105 で割った余りが，目的の n になる。

上の例に適用すると次のようになる[1]。

$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 4 = 263$$

$$n = 263 \bmod 105 = 53$$

注　K_3 は $70 - 105 = -35$ でもよい。この方が絶対値が小さいので計算が楽である。

問題 1 (千一減算)

1001 の約数 $7, 11, 13$ で割った余りを聞いて 3 桁の数を当てる同様のパズル千一減算が考えられる。このパズルのキーナンバー K_7, K_{11}, K_{13} を求めよ。なるべく絶対値が小さい数にしなさい。

[1] mod は $m \bmod n =$ (mをnで割った余り) を計算する演算子である。

解答

(1) $K_7 =$ (7 で割ると 1 余り, 11, 13 で割り切れる数)

$$11 \cdot 13 = 143 \equiv 3 \pmod 7$$
$$2 \cdot 143 = 286 \equiv 6 \equiv -1 \pmod 7$$
$$-286 \equiv 1 \pmod 7$$
$$\therefore K_7 = -286$$

(2) $K_{11} =$ (11 で割ると 1 余り, 7, 13 で割り切れる数)

$$7 \cdot 13 = 91 \equiv 3 \pmod{11}$$
$$4 \cdot 91 = 364 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$$
$$\therefore K_{11} = 364$$

(3) $K_{13} =$ (13 で割ると 1 余り, 7, 11 で割り切れる数)

$$7 \cdot 11 = 77 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}$$
$$-77 \equiv 1 \pmod{13}$$
$$\therefore K_{13} = -77$$