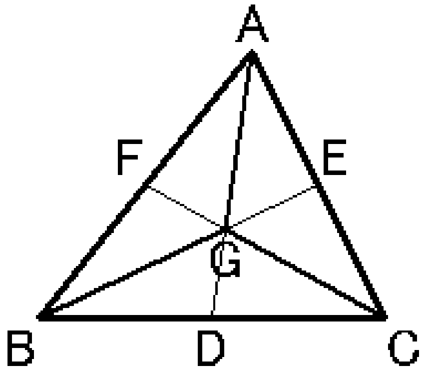
五心の位置ベクトル

三角形 ABC の五心の位置ベクトルを，角 A, B, C を用いる表し方と，辺 a, b, c を用いる表し方の 2 通りで表す。

1　重心 G

重心 G は 3 本の中線 AD，BE，CF の交点である。
図の D，E，F は，BC，CA，AB の中点である。



$$\alpha : \beta = \triangle\mathrm{GBC} : \triangle\mathrm{GCA} = \mathrm{BF} : \mathrm{FA} = 1 : 1$$

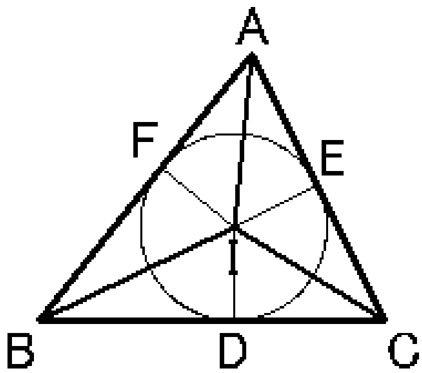
$$\beta : \gamma = \triangle\mathrm{GCA} : \triangle\mathrm{GAB} = \mathrm{CD} : \mathrm{DB} = 1 : 1$$

$$\therefore\ \alpha : \beta : \gamma = 1 : 1 : 1$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{g}} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{3}$$

2　内心 I

内心 I は 3 つの頂角の二等分線の交点で，内接円の中心である。
図の D，E，F は，内接円と各辺の接点で，



$$\mathrm{ID} = \mathrm{IE} = \mathrm{IF}\ \ (= \text{内接円の半径})$$

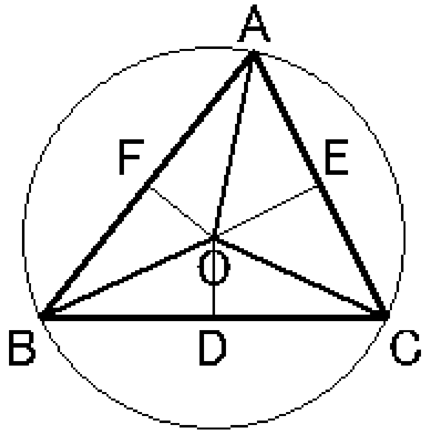
である。

$$\begin{aligned}\alpha : \beta : \gamma &= \triangle\mathrm{IBC} : \triangle\mathrm{ICA} : \triangle\mathrm{IAB}\\ &= \mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB}\\ &= a : b : c\\ &= \sin A : \sin B : \sin C\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \dfrac{\sin A\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \sin B\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \sin C\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{\sin A + \sin B + \sin C} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{i}} = \dfrac{a\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{a + b + c} \end{cases}$$

3　外心 O

外心 O は 3 辺の垂直二等分線の交点で，外接円の中心である。



$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} \ \ (= \text{外接円の半径})$$

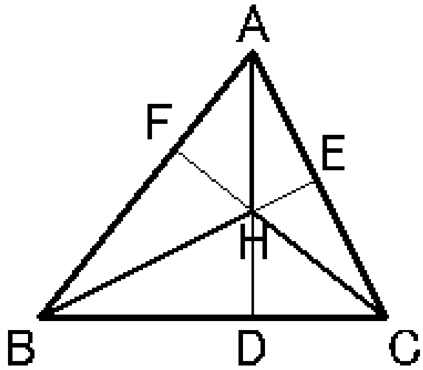
である。

$$\begin{aligned}
\alpha : \beta : \gamma &= \triangle\mathrm{OBC} : \triangle\mathrm{OCA} : \triangle\mathrm{OAB} \\
&= \sin\angle\mathrm{BOC} : \sin\angle\mathrm{OCA} : \sin\angle\mathrm{OAB} \\
&= \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C \\
&= 2\sin A\cos A : 2\sin B\cos B : 2\sin C\cos c \\
&= a\frac{b^2+c^2-a^2}{bc} : b\frac{c^2+a^2-b^2}{ca} : c\frac{a^2+b^2-c^2}{ab} \\
&= a^2(b^2+c^2-a^2) : b^2(c^2+a^2-b^2) : c^2(a^2+b^2-c^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases}
\overrightarrow{\boldsymbol{o}} = \dfrac{\sin 2A\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \sin 2B\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \sin 2C\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C} \\
\overrightarrow{\boldsymbol{o}} = \dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + b^2(c^2+a^2-b^2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + c^2(a^2+b^2-c^2)\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(c^2+a^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}
\end{cases}$$

4　垂心 H

垂心 H は 3 つの頂点から対辺に下ろした垂線の交点である。



$$\begin{aligned}
\alpha : \beta &= \triangle\mathrm{HBC} : \triangle\mathrm{HCA} \\
&= \mathrm{BF} : \mathrm{AF} \\
&= \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{AF}} : \frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{BF}} \\
&= \tan A : \tan B
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha : \beta : \gamma &= \tan A : \tan B : \tan C \\
&= \frac{\sin A}{\cos A} : \frac{\sin B}{\cos B} : \frac{\sin C}{\cos C} \\
&= \frac{abc}{b^2+c^2-a^2} : \frac{bca}{c^2+a^2-b^2} : \frac{cab}{a^2+b^2-c^2} \\
&= a^4-(b^2-c^2)^2 : b^4-(c^2-a^2)^2 : c^4-(a^2-b^2)^2
\end{aligned}$$

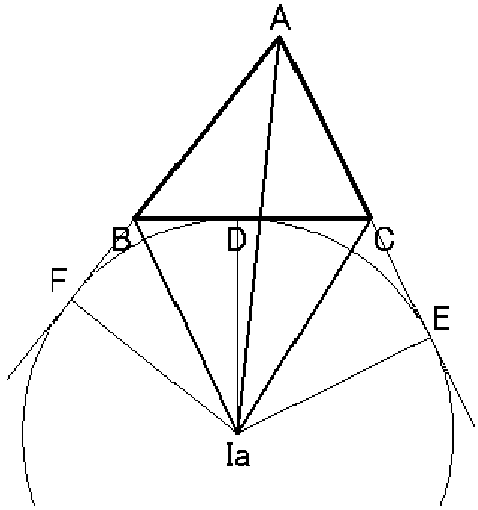
$$\begin{cases}
\overrightarrow{\boldsymbol{h}} = \dfrac{\tan A\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \tan B\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \tan C\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{\tan A + \tan B + \tan C} \\
\overrightarrow{\boldsymbol{h}} = \dfrac{\left(a^4-(b^2-c^2)^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \left(b^4-(c^2-a^2)^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \left(c^4-(a^2-b^2)^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{a^4-(b^2-c^2)^2+b^4-(c^2-a^2)^2+c^4-(a^2-b^2)^2}
\end{cases}$$

5　傍心 $\mathrm{I_A}$

傍心 $\mathrm{I_A}$ は頂角 A の二等分線と頂角 B，C の外角の二等分線の交点で，辺 BC に接する傍接円の中心である。
図の D，E，F は，傍接円と各辺の接点で，

$$\mathrm{I_AD} = \mathrm{I_AE} = \mathrm{I_AF}\ \ (= \text{傍接円の半径})$$

である。



$$\begin{aligned}\alpha : \beta : \gamma &= -\triangle \mathrm{I_ABC} : \triangle \mathrm{I_ACA} : \triangle \mathrm{I_AAB} \\ &= -\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} \\ &= -a : b : c \\ &= -\sin A : \sin B : \sin C\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{\boldsymbol{i}}_{\mathrm{A}} = \dfrac{-\sin A\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \sin B\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \sin C\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{-\sin A + \sin B + \sin C} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{i}}_{\mathrm{A}} = \dfrac{-a\,\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + b\,\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + c\,\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{-a + b + c} \end{cases}$$

6　外心 O，垂心 H，重心 G の位置関係

外心 $\overrightarrow{\boldsymbol{o}}$ と垂心 $\overrightarrow{\boldsymbol{h}}$ の辺を用いた表し方の分母を展開すると同じである。このことから，つぎの関係に気がつく。

OH を $1:2$ に内分する点を P とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{p}} &= \frac{2\overrightarrow{\boldsymbol{o}} + 1\overrightarrow{\boldsymbol{h}}}{3} \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + b^2(c^2+a^2-b^2)\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + c^2(a^2+b^2-c^2)\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{a^2(b^2+c^2-a^2) + b^2(c^2+a^2-b^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)} \\ &\quad + \frac{1}{3}\,\frac{\left(a^4-(b^2-c^2)^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \left(b^4-(c^2-a^2)^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \left(c^4-(a^2-b^2)^2\right)\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{a^4-(b^2-c^2)^2 + b^4-(c^2-a^2)^2 + c^4-(a^2-b^2)^2} \\ &= \frac{2}{3}\,\frac{(a^2b^2+c^2a^2-a^4)\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + (b^2c^2+a^2b^2-b^4)\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + (c^2a^2++b^2c^2-c^4)\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4} \\ &\quad + \frac{1}{3}\,\frac{(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + (b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)\overrightarrow{\boldsymbol{b}} + (c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)\overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4} \\ &= \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{a}} + \overrightarrow{\boldsymbol{b}} + \overrightarrow{\boldsymbol{c}}}{3} \\ &= \overrightarrow{\boldsymbol{g}}\end{aligned}$$

すなわち，P は重心 G にほかならない。

重心 G は外心 O と垂心 H を結んだ線分 OH の $1:2$ の内分点である。