1　因数分解

1.1　2 次式の因数分解

因数分解は掛け算の逆であることを体得するために，**整式の計算**で行った掛け算の形で，虫食い算を数多く練習すると良い。。

問題 1.1　次の掛け算が成り立つように，$\square$ を埋めなさい。

(1)

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 3 \\ \times & 3 & -1 \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square \end{array} \qquad \therefore \quad (2x+3)(3x-1) = \square x^2 + \square x + \square$$

(2)

$$\begin{array}{rrr} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 1 & 5 & -6 \end{array} \qquad \therefore \quad x^2+5x-6 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

(3)

$$\begin{array}{rrr} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 2 & -1 & -6 \end{array} \qquad \therefore \quad 2x^2-x-6 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

(4)

$$\begin{array}{rrr} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 6 & 5 & -6 \end{array} \qquad \therefore \quad 6x^2+5x-6 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

(5)

$$\begin{array}{rrr} & \square & \square \\ \times & \square & \square \\ \hline & \square & \square \\ \square & \square & \\ \hline 4 & -13 & 10 \end{array} \qquad \therefore \quad 4x^2-13x+10 = \left(\square x + \square\right)\left(\square x + \square\right)$$

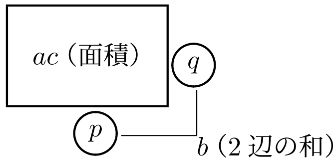
注 1.1　**たすきがけ法**と本質的に同じである。

x^2 の係数が 1 でないとき，たすきがけ法はやや面倒である。つぎの**矩形法**（くけいほう）が便利である。

公式 1.1 (矩形法)

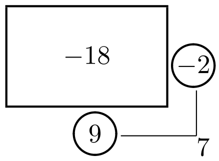
$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= \frac{(ax+p)(ax+q)}{a} \\ &= \text{約分して分母の } a \text{ を消した式} \end{aligned}$$

ただし $\begin{cases} p \times q = ac \\ p + q = b \end{cases}$ （右図）



例 1.1 $6x^2+7x-3$

$$\begin{aligned} 6x^2+7x-3 &= \frac{(6x+9)(6x-2)}{6} && (1) \\ &= \frac{3(2x+3)2(3x-1)}{3 \cdot 2} && (2) \\ &= (2x+3)(3x-1) && (3) \end{aligned}$$



問題 1.2 矩形法で因数分解しなさい（図や途中式 (2) は書かなくてよい)。

(1) $2x^2-x-6$

(2) $6x^2+5x-6$

(3) $4x^2-13x+10$

(4) $6x^2-xy-12y^2$

(5) $10x^2-19xy+6y^2$

1.2　高次式の因数分解

例 1.2　3 次式 $f(x) = 3x^3 + 8x^2 + x - 2$ を因数分解する。

ステップ 1

$f(p) = 0$ となる p を**整式の計算**の計算方法を使って見つける。
p は，d の約数を a の約数で割った分数だけ考えればよい。すなわち，

$$p = \pm\frac{n}{m} \quad \left(\begin{array}{l} n \text{ は } d \text{ の約数} \\ m \text{ は } a \text{ の約数（}m = 1 \text{ のとき}, p = n \text{ である）} \end{array} \right)$$

$p = \pm 1, \pm 2, \pm\dfrac{1}{3}, \pm\dfrac{2}{3}$ の中から $f(p) = 0$ になるものを見つける。

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = 1$	$\to$		3	11	12		
		3	11	12	10	$\times$	

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = -1$	$\to$		-3	-5	4		
	$\to$	3	5	-4	2	$\times$	

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = 2$	$\to$		6	28	58		
		3	14	29	56	$\times$	

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = -2$	$\to$		-6	-4	6		
		3	2	-3	4	$\times$	

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = \frac{1}{3}$	$\to$		1	3	$\frac{4}{3}$	$\times$	途中で分数になったら×にしてよい
		3	9	4			

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = -\frac{1}{3}$	$\to$		-1	$-\frac{7}{3}$		$\times$	
		3	7				

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = \frac{2}{3}$	$\to$		2	$\frac{4}{3}$		$\times$	
		3	10				

係数		3	$+8$	$+1$	-2		
$x = -\frac{2}{3}$	$\to$		-2	-4	2		
		3	6	-3	0	○	見つかった
		$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$			
		a_1	b_1	c_1			

ステップ 2

$f(x)$ は，ステップ 1 で見つけた p と，それを計算した表の a_1, b_1, c_1 を用いて，

$$f(x) = (x-p)(a_1x^2 + b_1x + c_1)$$

と因数分解できる。

$$f(x) = 3x^3 + 8x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 3)$$

ステップ 3

p が分数 $\dfrac{n}{m}$ のとき，a_1, b_1, c_1 は m の倍数になるので

$$f(x) = \left(x - \frac{n}{m}\right)(a_1x^2 + b_1x + c_1) = (mx - n)(a_2x^2 + b_2x + c_2)$$

の形に書き換える。

$$f(x) = \left(x + \frac{2}{3}\right)(3x^2 + 6x - 3) = (3x + 2)(x^2 + 2x - 1)$$

ステップ 4

2 次式 $a_2x^2 + b_2x + c_2$ が因数分解できる場合（$D = b^2 - 4ac$ が平方数のとき）は因数分解する。

$x^2 + 2x - 1$ について

$D = 4 - 4 \cdot 1(-1) = 8$　は平方数でないから因数分解できない

ゆえに

$f(x) = (3x + 2)(x^2 + 2x - 1)$

問題 1.3 因数分解しなさい（ステップ 4 を忘れないように)。

(1)　$x^3 - 3x^2 - 7x - 15$
(2)　$60x^3 - 37x^2 - 10x + 3$
(3)　$12x^3 - 5x^2 + 1$
(4)　$2x^4 - x^3 - 2x + 1$

1.3　解答

問題 1.1

(1)　$(2x+3)(3x-1)=6x^2+7x-3$

(2)　$x^2+5x-6=(1x+6)(1x-1)$

(3)　$2x^2-x-6=(2x+3)(x-2)$

(4)　$6x^2+5x-6=(3x-2)(2x+3)$

(5)　$4x^2-13x+10=(4x-5)(x-2)$

問題 1.2

(1)　$2x^2-x-6=\dfrac{(2x+3)(2x-4)}{2}=(2x+3)(x-2)$

(2)　$6x^2+5x-6=\dfrac{(6x-4)(6x+9)}{6}=(3x-2)(2x+3)$

(3)　$4x^2-13x+10=\dfrac{(4x-5)(4x-8)}{4}=(4x-5)(x-2)$

(4)　$6x^2-xy-12y^2=\dfrac{(6x+8y)(6x-9y)}{6}=(3x+4y)(2x-3y)$

(5)　$10x^2-19xy+6y^2=\dfrac{(10x-15y)(10x-4y)}{10}=(2x-3y)(5x-2y)$

問題 1.3

(1)　$x^3-3x^2-7x-15=(x-5)(x^2+2x+3)$

(2)　$60x^3-37x^2-10x+3=(3x+1)(4x-3)(5x-1)$

(3)　$12x^3-5x^2+1=(3x+1)(4x^2-3x+1)$

(4)　$2x^4-x^3-2x+1=(x-1)(2x-1)(x^2+x+1)$