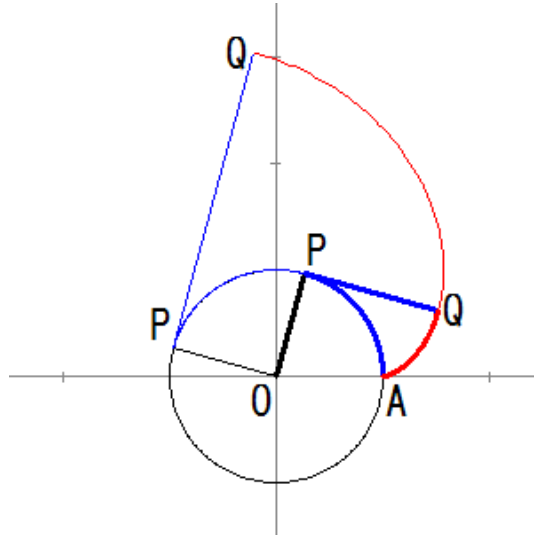


# 1 円の伸開線

円に糸が巻き付けてある。この糸をほどいていく。糸の先端が描く曲線を伸開線 (involute) という。



## 1.1 媒介変数表示

円の半径を  $a$ ,  $\angle AOP = t$  とおくと

$$\overrightarrow{OP} = (a \cos t, a \sin t)$$

$PQ = \text{弧 } AP = at$ ,  $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OP}$  だから

$$\overrightarrow{PQ} = at(\sin t, -\cos t)$$

$$\therefore \overrightarrow{OQ} = a(\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$$

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

## 1.2 曲線の長さ

曲線  $AQ$  の長さを  $l$  とする。

$$\frac{dx}{dt} = a(\sin t + \sin t + t \cos t) = at \cos t$$

$$\frac{dy}{dt} = a(\cos t - \cos t + t \sin t) = at \sin t$$

$$l = \int_0^t \sqrt{(at \cos t)^2 + (at \sin t)^2} dt = \int_0^t at dt = \frac{1}{2}at^2$$