1　円の伸開線と外サイクロイドの関係

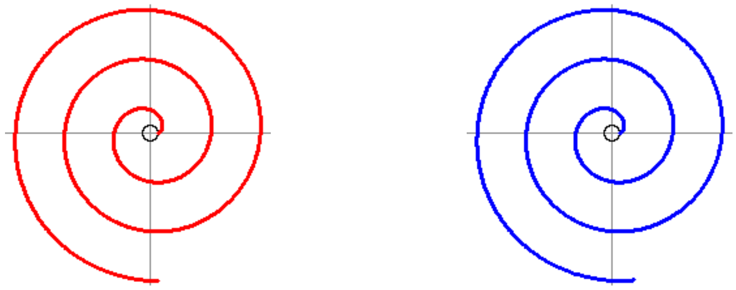
左の図は，半径 1 の円の伸開線

$$\begin{cases} x = \cos\theta + \theta\sin\theta \\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta \end{cases}$$

で，右の図は，半径 $R=1$ の定円のまわりを半径 $r=100$ の動円を転がした外サイクロイド

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos\dfrac{R+r}{r}\theta \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin\dfrac{R+r}{r}\theta \end{cases}$$

です $(0 \leqq \theta \leqq 6\pi)$.



よく似ています.

解説

定円の半径が R，動円の半径が r の外サイクロイドを考える．
定円と動円の接点を P とする．
$\angle\mathrm{AOP} = \theta$ のときの外サイクロイド上の点を $\mathrm{Q}(x, y)$ とする．
Q から P の方に，定円の接線を引き，接点を T とする．
$\phi = \angle\mathrm{AOT}$ とする．

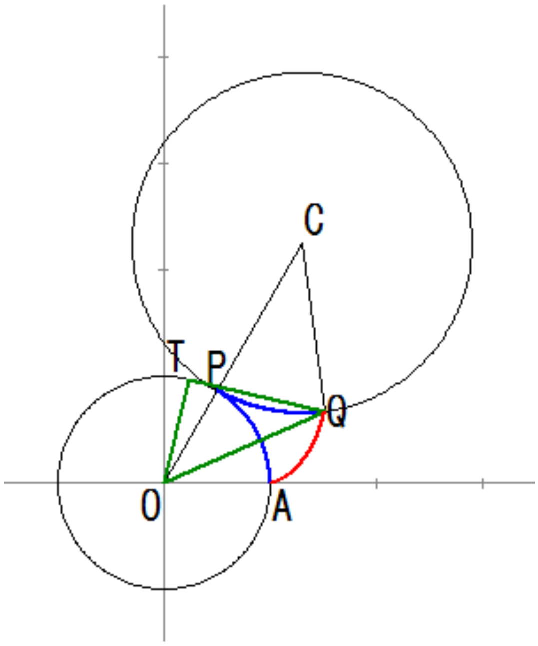
(1) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \phi = \theta$

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \mathrm{QT} = R\theta$

が成り立つ．すなわち，

$$\lim_{r\to\infty} \text{外サイクロイド} = \text{円の伸開線}$$

である．
ゆえに，r が R に比べて非常に大きいときの外サイクロイドは円の伸開線とほぼ同じである．



証明

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos\dfrac{R+r}{r}\theta \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin\dfrac{R+r}{r}\theta \end{cases}$$

(1) $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\phi = \theta$ を示す.

Q(x, y) が C$(R\cos\phi, R\sin\phi)$ の接線上にあるから

$$(R\cos\phi)x + (R\sin\phi)y = R^2$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
R &= \cos\phi\left((R+r)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta\right) + \sin\phi\left((R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta\right) \\
&= (R+r)\left(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta\right) - r\left(\cos\phi\cos\frac{R+r}{r}\theta + \sin\phi\sin\frac{R+r}{r}\theta\right) \\
&= (R+r)\cos(\phi-\theta) - r\cos\left(\phi - \frac{R+r}{r}\theta\right) \\
&= (R+r)\cos(\phi-\theta) - r\cos\left((\phi-\theta) - \frac{R}{r}\theta\right) \\
&= (R+r)\cos(\phi-\theta) - r\left(\cos(\phi-\theta)\cos\frac{R}{r}\theta + \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta\right) \\
&= R\cos(\phi-\theta) - r\cos(\phi-\theta)\left(1 - \cos\frac{R}{r}\theta\right) - \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \\
&= R\cos(\phi-\theta) - r\cos(\phi-\theta)2\sin^2\frac{R}{2r}\theta - \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \\
&= R\cos(\phi-\theta) - \cos(\phi-\theta)\frac{(R\theta)^2}{2r}\left(\frac{\sin\frac{R\theta}{2r}}{\frac{R\theta}{2r}}\right)^2 - \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \\
&\to R\cos(\phi-\theta) - \cos(\phi-\theta)\cdot 0\cdot 1^2 - \sin(\phi-\theta)\cdot 0 \quad (r\to\infty) \\
&= R\cos(\phi-\theta)
\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{r\to\infty}\phi = \theta$$

(2) $\displaystyle\lim_{r\to\infty} \mathrm{QT} = R\theta$ を示す.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{OQ}^2 &= (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)r\left(\cos\theta\cos\frac{R+r}{r}\theta + \sin\theta\sin\frac{R+r}{r}\theta\right)\\
&= (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)r\cos\frac{R}{r}\theta\\
\mathrm{QT}^2 &= \mathrm{OQ}^2 - \mathrm{OT}^2\\
&= 2Rr + r^2 + r^2 - 2(R+r)r\cos\frac{R}{r}\theta\\
&= 2(R+r)r\left(1-\cos\frac{R}{r}\theta\right)\\
&= 2(R+r)r\ 2\sin^2\frac{R}{2r}\theta\\
&= 4(R+r)r\left(\frac{R}{2r}\theta\right)^2\left(\frac{\sin\frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta}\right)^2\\
&= \frac{R+r}{r}(R\theta)^2\left(\frac{\sin\frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta}\right)^2\\
&\to (R\theta)^2 \quad (r\to\infty)
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \lim_{r\to\infty}\mathrm{QT} = R\theta$$

追記

　$r=\infty$ と考えると，動円は定円に接する直線になります．直線が定円に沿って回転することになります．まさに，伸開線そのものです．