

1 円の伸開線と外サイクロイドの関係

左の図は、半径 1 の円の伸開線

$$x = \cos \theta + \sin \theta$$

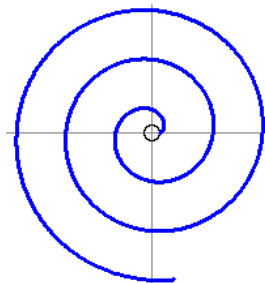
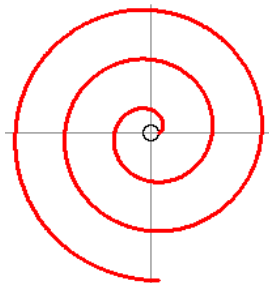
$$y = \sin \theta - \cos \theta$$

で、右の図は、半径 $R = 1$ の定円のまわりを半径 $r = 100$ の動円を転がした外サイクロイド

$$x = (R + r) \cos \theta - r \cos \frac{R + r}{r} \theta$$

$$y = (R + r) \sin \theta - r \sin \frac{R + r}{r} \theta$$

です ($0 \leq \theta \leq 6\pi$).



よく似ています。

解説

定円の半径が R 、動円の半径が r の外サイクロイドを考える。

定円と動円の接点を P とする。

$\angle AOP = \theta$ のときの外サイクロイド上の点を $Q(x, y)$ とする。

Q から P の方に、定円の接線を引き、接点を T とする。

$\phi = \angle AOT$ とする。

$$(1) \lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \theta$$

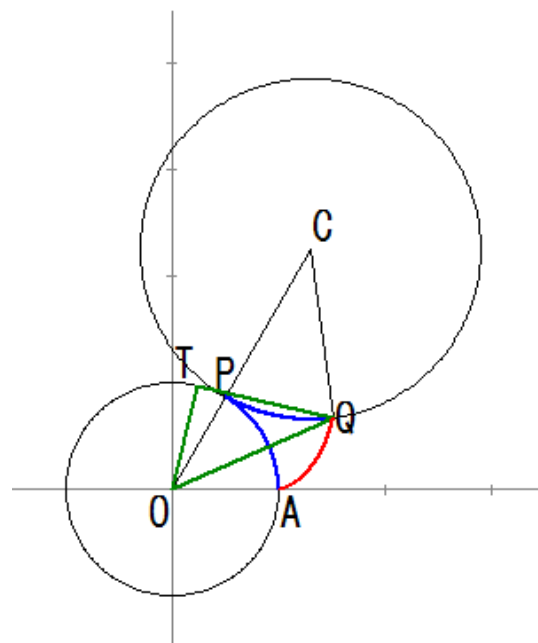
$$(2) \lim_{r \rightarrow \infty} QT = R\theta$$

が成り立つ。すなわち、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \text{外サイクロイド} = \text{円の伸開線}$$

である。

ゆえに、 r が R に比べて非常に大きいときの外サイクロイドは円の伸開線とほぼ同じである。



証明

$$\begin{cases} x = (R+r)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta \\ y = (R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta \end{cases}$$

(1) $\lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \theta$ を示す.

$Q(x, y)$ が $C(R\cos\phi, R\sin\phi)$ の接線上にあるから

$$(R\cos\phi)x + (R\sin\phi)y = R^2$$

ゆえに

$$\begin{aligned} R &= \cos\phi \left((R+r)\cos\theta - r\cos\frac{R+r}{r}\theta \right) + \sin\phi \left((R+r)\sin\theta - r\sin\frac{R+r}{r}\theta \right) \\ &= (R+r)(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) - r \left(\cos\phi\cos\frac{R+r}{r}\theta + \sin\phi\sin\frac{R+r}{r}\theta \right) \\ &= (R+r)\cos(\phi-\theta) - r\cos\left(\phi - \frac{R+r}{r}\theta\right) \\ &= (R+r)\cos(\phi-\theta) - r\cos\left((\phi-\theta) - \frac{R}{r}\theta\right) \\ &= (R+r)\cos(\phi-\theta) - r \left(\cos(\phi-\theta)\cos\frac{R}{r}\theta + \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \right) \\ &= R\cos(\phi-\theta) - r\cos(\phi-\theta) \left(1 - \cos\frac{R}{r}\theta \right) - \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \\ &= R\cos(\phi-\theta) - r\cos(\phi-\theta)2\sin^2\frac{R}{2r}\theta - \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \\ &= R\cos(\phi-\theta) - \cos(\phi-\theta)\frac{(R\theta)^2}{2r} \left(\frac{\sin\frac{R\theta}{2r}}{\frac{R\theta}{2r}} \right)^2 - \sin(\phi-\theta)\sin\frac{R}{r}\theta \\ &\rightarrow R\cos(\phi-\theta) - \cos(\phi-\theta) \cdot 0 \cdot 1^2 - \sin(\phi-\theta) \cdot 0 \quad (r \rightarrow \infty) \\ &= R\cos(\phi-\theta) \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{r \rightarrow \infty} \phi = \theta$

(2) $\lim_{r \rightarrow \infty} QT = R\theta$ を示す.

$$\begin{aligned}
 OQ^2 &= (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)r \left(\cos \theta \cos \frac{R+r}{r}\theta + \sin \theta \sin \frac{R+r}{r}\theta \right) \\
 &= (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)r \cos \frac{R}{r}\theta \\
 QT^2 &= OQ^2 - OT^2 \\
 &= 2Rr + r^2 + r^2 - 2(R+r)r \cos \frac{R}{r}\theta \\
 &= 2(R+r)r \left(1 - \cos \frac{R}{r}\theta \right) \\
 &= 2(R+r)r \cdot 2 \sin^2 \frac{R}{2r}\theta \\
 &= 4(R+r)r \left(\frac{R}{2r}\theta \right)^2 \left(\frac{\sin \frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta} \right)^2 \\
 &= \frac{R+r}{r} (R\theta)^2 \left(\frac{\sin \frac{R}{2r}\theta}{\frac{R}{2r}\theta} \right)^2 \\
 &\rightarrow (R\theta)^2 \quad (r \rightarrow \infty) \\
 \therefore \lim_{r \rightarrow \infty} QT &= R\theta
 \end{aligned}$$

追記

$r = \infty$ と考えると、動円は定円に接する直線になります。直線が定円に沿って回転することになります。まさに、伸開線そのものです。

