1　$2 \times n$ の盤の色分け

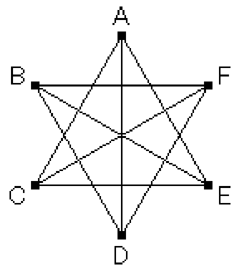
問題 1.1 $2 \times n$ の盤の各マスを r, g, b の 3 色で塗り分ける。ただし，隣り合ったマスには異なる色を塗らないといけない。このような色分けのしかたは何通りあるか。

例 1.1 $n = 8$ のときの塗り方の例

r	g	b	g	r	b	g	b
g	b	g	r	b	r	b	g

各列の 2 マスには異なる色を塗るので，つぎの 6 パターンある。

上	r	r	g	g	b	b
下	g	b	b	r	r	g
パターン	A	B	C	D	E	F



この 6 パターンを一列に並べると考えることができる。ただし，隣り合うことができるのは，右図の線で結ばれたパターンどうしに限る。

例 1.2 上の例をパターンで表すと，こうなる。

$ACFDBECF$

解答 1.1

1 つ目	6 通り
2 つ目以降	3 通り
ゆえに	$6 \times 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$通り

問題 1.2 先頭（1 列目）と末尾（n 列目）が同じ塗り方（同じパターン）になる塗り方は何通りあるか。

先頭がパターン A で末尾が A, B, C, D, E, F であるように n 個並べる並べ方の個数を，それぞれ $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ とする。

$$a_1 = 1 \qquad a_{k+1} = c_k + d_k + e_k \tag{1}$$
$$b_1 = 0 \qquad b_{k+1} = d_k + e_k + f_k \tag{2}$$
$$c_1 = 0 \qquad c_{k+1} = a_k + e_k + f_k \tag{3}$$
$$d_1 = 0 \qquad d_{k+1} = a_k + b_k + f_k \tag{4}$$
$$e_1 = 0 \qquad e_{k+1} = a_k + b_k + c_k \tag{5}$$
$$f_1 = 0 \qquad f_{k+1} = b_k + c_k + d_k \tag{6}$$

$(1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6)$　より

$$a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1} + d_{k+1} + e_{k+1} + f_{k+1} = 3(a_k + b_k + c_k + d_k + e_k + f_k)$$
$$\therefore \quad a_k + b_k + c_k + d_k + e_k + f_k = 3^{k-1}(a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1) = 3^{k-1}$$

$(1) + (4)$ より

$$a_{k+1} + d_{k+1} = a_k + b_k + c_k + d_k + e_k + f_k = 3^{k-1} \tag{7}$$

$(2) - (3)$, $(5) - (6)$, $(1) - (4)$ より

$$b_{k+1} - c_{k+1} = -(a_k - d_k)$$
$$e_{k+1} - f_{k+1} = a_k - d_k$$
$$a_{k+1} - d_{k+1} = -(a_k - d_k) - (b_k - c_k) + (e_k - f_k) = -(a_k - d_k) + 2(a_{k-1} - d_{k-1})$$
$$(a_{k+1} - d_{k+1}) + 2(a_k - d_k) = (a_k - d_k) + 2(a_{k-1} - d_{k-1})$$
$$\therefore \quad (a_{k+1} - d_{k+1}) + 2(a_k - d_k) = (a_2 - d_2) + 2(a_1 - d_1) = 1$$

また

$$(a_{k+1} - d_{k+1}) - (a_k - d_k) = -2\{(a_k - d_k) - (a_{k-1} - d_{k-1})\}$$
$$\therefore \quad (a_{k+1} - d_{k+1}) - (a_k - d_k) = (-2)^{k-1}\{(a_2 - d_2) - (a_1 - d_1)\} = (-2)^k$$

ゆえに

$$3(a_{k+1} - d_{k+1}) = 2(-2)^k + 1 \tag{8}$$

$(7), (8)$ より

$$a_{k+1} = \frac{3^k + 2(-2)^k + 1}{6} \tag{9}$$

解答 1.2 先頭と末尾が共にパターン A であるような並べ方は,

$$a_n = \frac{3^{n-1} + 2(-2)^{n-1} + 1}{6}$$

通りあり，先頭と末尾が同じパターンになる並べ方は,

$$3^{n-1} + 2(-2)^{n-1} + 1$$

通りある。