質問

この命題は正しいですか？

(命題) 成功確率が$\dfrac{1}{3}$の操作が n 回成功するまでに必要な操作の回数の期待値は $3n$ になる。

直感的ではなく理論的な説明を与えてください。

回答

次の拡張を用います.

二項係数の拡張

実数 α と，自然数（0 を含む）k について

$$ {}_{\alpha}\mathrm{C}_k = \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-2}{3} \cdot \cdots \cdot \frac{\alpha-k+1}{k} $$

と定義する。

二項定理の拡張

$$ (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\alpha}\mathrm{C}_k \, x^k $$

すなわち

$$ (1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{\alpha}{1}x + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2}x^2 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha-1}{2} \cdot \frac{\alpha-2}{3}x^3 + \cdots $$

例

$$ \begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{-n-1}\mathrm{C}_k (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-n-1}{1} \cdot \frac{-n-2}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{-n-k}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{n+k}{k} \; x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+n}\mathrm{C}_k \, x^k \end{aligned} $$

n 回成功するまでの平均回数

一般に成功確率を p（$0 < p < 1$），失敗確率を $q = 1 - p$ とします.

n 回成功するまでに k 回失敗する確率は，${}_{k+n-1}\mathrm{C}_k q^k p^n$．ゆえに，$n$ 回成功するまでの回数の期待値 E は

$$ \begin{aligned} E &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+n) {}_{k+n-1}\mathrm{C}_k q^k p^n = p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k!\,(n-1)!} q^k = p^n \sum_{k=0}^{\infty} n \; {}_{k+n}\mathrm{C}_k q^k \\ &= np^n \sum_{k=0}^{\infty} {}_{k+n}\mathrm{C}_k q^k = np^n \frac{1}{(1-q)^{n+1}} = np^n \frac{1}{p^{n+1}} = \frac{n}{p} \end{aligned} $$