1　任意の直線を軸とする回転移動

1.1　行列による表現

一次変換と平行移動を組み合わせた変換

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz + l \\ y' = dx + ey + fz + m \\ z' = gx + hy + iz + n \end{cases}$$

は，4×4 行列を用いて，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & l \\ d & e & f & m \\ g & h & i & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される。ただし，w' は必ず 1 になる。

1.2　平行移動

x 軸方向に l，y 軸方向に m，z 軸方向に n だけ平行移動する変換を表す行列を $T(l,m,n)$ とすると，

$$T(l,m,n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 & m \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3　座標軸のまわりの回転

3 つの座標軸のまわりに θ だけ回転する変換をそれぞれ，$R_x(\theta), R_y(\theta), R_z(\theta)$ とすると，

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4　任意の直線のまわりの回転

点 $\mathrm{A}(p,q,r)$ を通り，方向ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{d}}=(a,b,c)$ に平行な直線

$$\ell\ :\ \frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}$$

のまわりに θ だけ回転する変換を表す行列 M を段階を追って求めよう。

(1)　A が原点 O に重なるように平行移動する。

$$T(-p,-q,-r)=\begin{pmatrix}1&0&0&-p\\0&1&0&-q\\0&0&1&-r\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(2)　ℓ（原点を通り，$\overrightarrow{\boldsymbol{d}}\ (a,b,c)$ に平行な直線になった）が zx 平面に含まれるように，x 軸のまわりに回転する。

$$R_x(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\alpha&-\sin\alpha&0\\0&\sin\alpha&\cos\alpha&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\dfrac{c}{L_1}&-\dfrac{b}{L_1}&0\\0&\dfrac{b}{L_1}&\dfrac{c}{L_1}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\left(L_1=\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

(3)　ℓ（原点を通り，$\overrightarrow{\boldsymbol{d}}=(a,0,L_1)$ に平行な直線になった）が z 軸に重なるように，y 軸のまわりに回転する。

$$R_y(-\beta)=\begin{pmatrix}\cos(-\beta)&0&\sin(-\beta)&0\\0&1&0&0\\-\sin(-\beta)&0&\cos(-\beta)&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{L_1}{L_2}&0&-\dfrac{a}{L_2}&0\\0&1&0&0\\\dfrac{a}{L_2}&0&\dfrac{L_1}{L_2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\left(L_2=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)$$

(4)　ℓ（z 軸に重なった）のまわりに回転する。

$$R_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta&0&0\\\sin\theta&\cos\theta&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(5)　(3) の逆に回転する。

$$R_y(\beta)=\begin{pmatrix}\dfrac{L_1}{L_2}&0&\dfrac{a}{L_2}&0\\0&1&0&0\\-\dfrac{a}{L_2}&0&\dfrac{L_1}{L_2}&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(6)　(2) の逆に回転する。

$$R_x(-\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{c}{L_1} & \dfrac{b}{L_1} & 0 \\ 0 & -\dfrac{b}{L_1} & \dfrac{c}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(7)　(1) の逆に平行移動する。

$$T(p,q,r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p \\ 0 & 1 & 0 & q \\ 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以上 7 つの変換を合成したものが ℓ のまわりの回転である。

$$M = T(p,q,r)R_x(-\alpha)R_y(\beta)R_zR_y(-\beta)R_x(\alpha)T(-p,-q,-r)$$

注 1.1 7 つの変換行列の積を計算するのだが，4 行目は常に (0 0 0 1) であるから，計算しなくてよい。