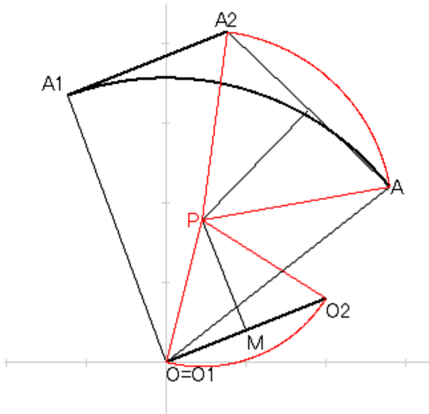
回転移動プラス平行移動

原点のまわりに $\theta\ (\neq 0)$ だけ回転移動した後，(a, b) だけ平行移動するのは，ある点 $\mathrm{P}(p, q)$ のまわりに θだけ回転移動するのと同じことになる。



このことを，式で表すと

$$\begin{cases} x_2 = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y_2 = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 - p = (x-p)\cos\theta - (y-q)\sin\theta \\ y_2 - q = (x-p)\sin\theta + (y-q)\cos\theta \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases} p(1-\cos\theta) + q\sin\theta = a \\ -p\sin\theta + q(1-\cos\theta) = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \dfrac{a(1-\cos\theta) - b\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \dfrac{a(1-\cos\theta) - b\sin\theta}{2(1-\cos\theta)} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}\cot\dfrac{\theta}{2} \\ q = \dfrac{a\sin\theta + b(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \dfrac{a\sin\theta + b(1-\cos\theta)}{2(1-\cos\theta)} = \dfrac{b}{2} + \dfrac{a}{2}\cot\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

このことは，原点 O を点 P のまわりに θだけ回転すると O_2 になる，すなわち，$\triangle\mathrm{POO}_2$ が頂角 θの二等辺三角形であることから確かめられる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \overrightarrow{\mathrm{MP}}$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix} + \cot\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -\frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$