1　曲線・直線の方程式

方程式に現れる定数 a, b, c などが図形的に何を意味しているのか考える。

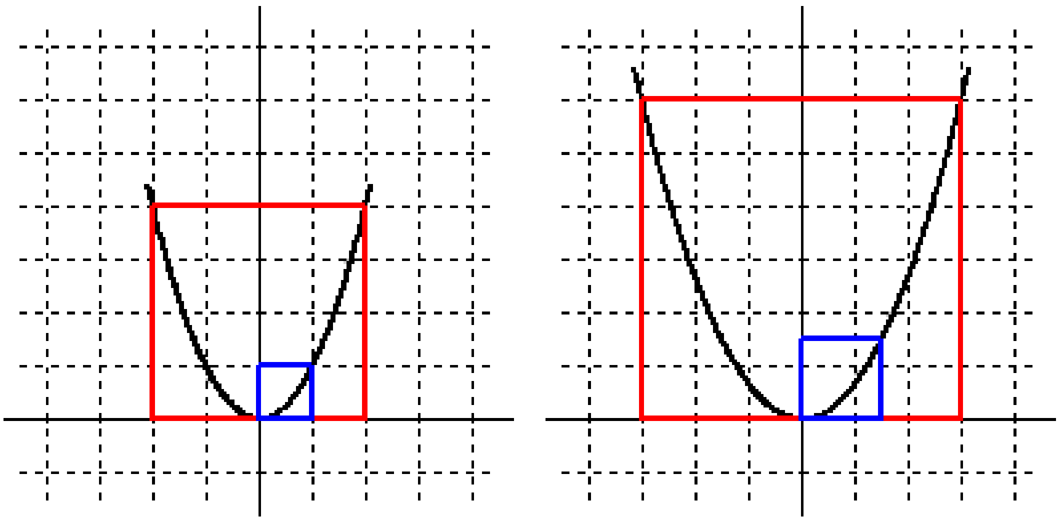
1.1　問題

例 1.1 $y = ax^2$ はどんな放物線か。

[**答**] $y = x^2$ を $\frac{1}{a}$ 倍に拡大・縮小した形をしていて，頂点が原点の放物線。

注 1.1 放物線はすべて相似で，何倍かに拡大・縮小すると一致する。

$$y = x^2 \quad \xrightarrow{\frac{3}{2}\text{倍}} \quad y = \frac{2}{3}x^2$$



問題 1.1 どんな放物線か。

1. $y = a(x-p)^2 + q$
2. $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$
3. $y = ax^2 + bx + c$

問題 1.2 どんな円か（ただし，$\mathrm{A}(a,b) \neq \mathrm{C}(c,d)$）。

1. $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
2. $(x-a)^2+(y-b)^2=(c-a)^2+(d-b)^2$
3. $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$
4. $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$

問題 1.3 どんな直線か。

1. $y=ax+b$
2. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

問題 1.4 どんな直線か（ただし，$\mathrm{A}(a,b) \neq \mathrm{O}(0,0)$，$\mathrm{A}(a,b) \neq \mathrm{C}(c,d)$）。

1. $ay-bx=0$
2. $ay-bx=ad-bc$

注 1.2 三角形 OAC の符号付面積 $\triangle\mathrm{OAC}$ を考えると面白い。

$$\begin{aligned}
&\triangle\mathrm{OAC}=\frac{1}{2}(ad-bc)\\
&\triangle\mathrm{OAC}>0 \iff \mathrm{O}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\text{が反時計回り}\\
&\triangle\mathrm{OAC}<0 \iff \mathrm{O}\to\mathrm{A}\to\mathrm{C}\text{が時計回り}
\end{aligned}$$

問題 1.5 どんな直線か（ただし，$\mathrm{A}(a,b) \neq \mathrm{O}(0,0)$）。
線分 OA の長さ，原点から直線までの距離に注目して答えなさい。

1. $ax+by=0$
2. $ax+by=a^2+b^2$
3. $ax+by=k(a^2+b^2)$
4. $ax+by=\sqrt{a^2+b^2}$
5. $ax+by=d\sqrt{a^2+b^2}$
6. $ax+by+c=0$

1.2　解答

問題 1.1

1. $y = a(x-p)^2 + q$
   $y = x^2$ を $\frac{1}{a}$ 倍に拡大・縮小した形をしていて，頂点が (p, q) の放物線。
2. $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$
   $y = x^2$ を $\frac{1}{a}$ 倍に拡大･縮小した形をしていて，x 軸との交点が $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ の放物線。
3. $y = ax^2 + bx + c$
   $y = x^2$ を $\frac{1}{a}$ 倍に拡大・縮小した形をしていて，y 軸との交点が $(0, c)$ で，その点における接線が $y = bx + c$ の放物線。

問題 1.2

1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
   中心が $\mathrm{A}(a, b)$ で，半径が r の円。
2. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$
   中心が $\mathrm{A}(a, b)$ で，$\mathrm{C}(c, d)$ を通る円。
3. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$
   中心が $\mathrm{A}(a, b)$ で，x 軸に接している円。
4. $(x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0$
   線分 AC を直径にもつ円。
   あるいは，$x = a$，$x = c$，$y = b$，$y = d$ で囲まれる長方形の外接円。

注 1.3 $\mathrm{P}(x, y)$ とすると，

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0 \\ \iff & \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CP}} = 0 \\ \iff & \angle \mathrm{APC} = 90^\circ \end{aligned}$$

問題 1.3

1. $y = ax + b$
   傾きが a で，y 軸との交点が $(0, b)$ の直線。
2. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
   x 軸との交点が $(a, 0)$，y 軸との交点が $(0, b)$ の直線。

問題 1.4

1. $ay - bx = 0$
   $\triangle\mathrm{OAP} = 0$
   ゆえに，直線 OA。

2. $ay - bx = ad - bc$
   $\triangle\mathrm{OAP} = \triangle\mathrm{OAC}$
   OA $/\!/$ CP
   ゆえに，点 C を通り，OA に平行な直線。

問題 1.5

1. $ax + by = 0$
   原点を通り，OA に垂直な直線。
   原点からの距離は 0。

2. $ax + by = a^2 + b^2$
   A を通り，OA に垂直な直線。
   原点からの距離は $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3. $ax + by = k(a^2 + b^2)$
   点 $\mathrm{K}(ka, kb)$ （$\overrightarrow{\mathrm{OK}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ で定まる点）を通り，OA に垂直な直線。
   原点からの距離は $|k|\mathrm{OA} = |k|\sqrt{a^2 + b^2}$。

4. $ax + by = \sqrt{a^2 + b^2}$
   前問で，$k = \dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ の場合である。
   OA に垂直で，原点からの距離が 1 の直線（2 本あるうちの 1 本）。
   原点に関して A と同じ側にある方。

5. $ax + by = d\sqrt{a^2 + b^2}$
   OA に垂直で，原点からの距離が $|d|$ の直線。
   $d > 0$ ならば，原点に関して A と同じ側にある方。
   $d < 0$ ならば，原点に関して A と反対側にある方。

6. $ax + by + c = 0$
   $d = -\dfrac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ とおくと前問と同じ。
   OA に垂直で，原点からの距離が $\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|c|}{\mathrm{OA}}$ の直線。
   $c < 0$ ならば，原点に関して A と同じ側にある方。
   $c > 0$ ならば，原点に関して A と反対側にある方。