数学的帰納法による不等式の証明

自然数 n に関する不等式 $f(n) \leqq g(n)$ の数学的帰納法による証明は，つぎの 2 つのことを示す。

(i) $f(1) \leqq g(1)$

(ii) $f(k) \leqq g(k) \ \Rightarrow \ f(k+1) \leqq g(k+1) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$

(ii) を示すとき，十分条件であるつぎのことを示すことが多い。

(ii′) $f(k+1) - f(k) \leqq g(k+1) - g(k) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$

例 1 $\quad 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < \dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

(ii’) $2\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) < \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ を示せばよい。

$$2\left(\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} < \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

例 2 $\quad \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} < 2$

(ii’) $\dfrac{1}{(k+1)^2} < 0$ は成り立たないので，工夫が必要である。

$\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \leqq 2 - \dfrac{1}{n}$ を数学的帰納法で示すことにする。

(ii’) $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqq \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ を示せばよい。

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \geqq \frac{1}{(k+1)^2}$$

例 3 $\quad 2! \cdot 4! \cdot \cdots \cdot (2n)! \geqq ((n+1)!)^n$

左辺が和ではなく積の形をしているので，(ii’) のように増加量ではなく，増加率を比べる (ii”) を用いる。

(ii″) $\dfrac{f(k+1)}{f(k)} \leqq \dfrac{g(k+1)}{g(k)} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$

(ii”) $(2(k+1))! \geqq \dfrac{((k+2)!)^{k+1}}{((k+1)!)^k}$ を示せばよい。

$$\begin{aligned}\frac{((k+2)!)^{k+1}}{((k+1)!)^k} &= \frac{(k+2)^{k+1}\,((k+1)!)^{k+1}}{((k+1)!)^k} = (k+2)^{k+1}(k+1)! \\ &\leqq \underbrace{(2k+2)(2k+1)\dots(k+2)}_{(k+1)\text{ 個の積}}(k+1)! = (2k+2)!\end{aligned}$$