# 1　交点を通る直線・円

## 1.1　2 直線の交点を通る直線

**定理 1.1** 平行でない 2 直線 $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ と $\ell_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ の交点 P を通る直線は

$$\ell :\ m(a_1x + b_1y + c_1) + n(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

$$(\text{ただし},\ m = n = 0\ \text{ではない})$$

と表される。

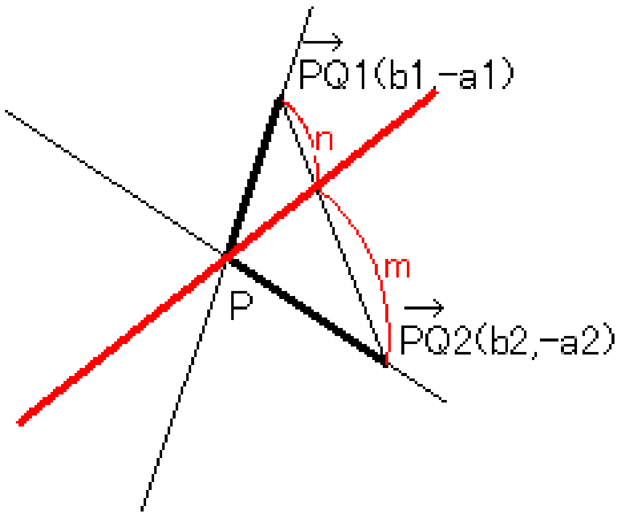
**注 1.1** $\ell_i$ はベクトル $(b_i, -a_i)$ に平行だから，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}_i} = (b_i, -a_i)$ で定まる点 $\mathrm{Q}_i$ が $\ell_i$ 上にある。

$m + n = 0 \iff \ell$は $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$に平行

$m + n \neq 0 \iff \ell$は $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$を $n : m$ に
内分（$m, n$ が同符号の場合）または
外分（$m, n$ が異符号の場合）する点を通る

$m = 0 \iff \ell$は $\mathrm{Q}_2$を通る，すなわち $\ell_2$

$n = 0 \iff \ell$は $\mathrm{Q}_1$を通る，すなわち $\ell_1$



## 1.2　円と直線の交点を通る円

**定理 1.2** 円 $C_1:\ x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ と直線 $\ell_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点 P, Q を通る円は

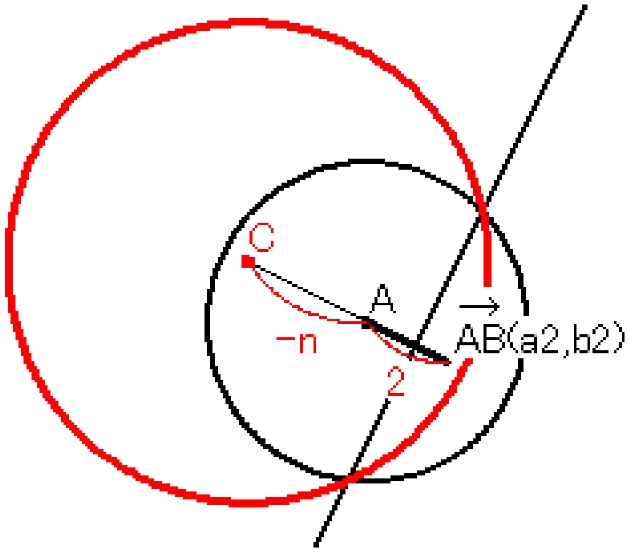
$$C:\ x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1+n(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

と表される。

**注 1.2** 円 $C_1$ の中心を A とすると，$\ell_2$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a_2,b_2)$ に垂直である。円 $C$ の中心は，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-\frac{n}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

で定まる点 C である。



## 1.3　2つの円の交点を通る円

**定理 1.3** 交差する 2 円 $C_1: \ x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0$ と $C_2: \ x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0$ の交点 P, Q を通る円および直線は

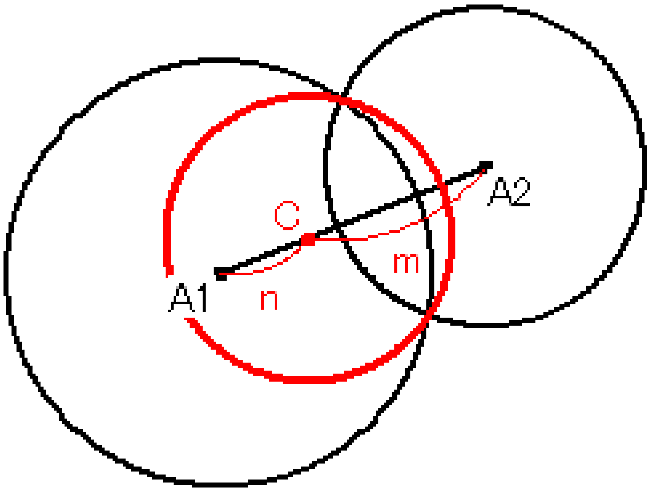
$$C: \ m\left(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1\right)+n\left(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2\right)=0$$

(ただし, $m=n=0$ ではない)

と表される。

**注 1.3** $C_i$ の中心を $\mathrm{A}_i$，$C$ の中心を C とすると

| | | |
|---|---|---|
| $m+n=0$ | $\Longleftrightarrow$ | $C$ は直線 PQ である。 |
| $m+n\neq 0$ | $\Longleftrightarrow$ | C は $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$を $n:m$ に |
| | | 内分（$m,n$ が同符号の場合）または |
| | | 外分（$m,n$ が異符号の場合）する点である |
| $m=0$ | $\Longleftrightarrow$ | $\mathrm{C}=\mathrm{A}_2$，すなわち $C=C_2$ |
| $n=0$ | $\Longleftrightarrow$ | $\mathrm{C}=\mathrm{A}_1$，すなわち $C=C_1$ |



## 1.4 応用問題

**問題 1.1** 3 点 $\mathrm{A}(-2,7), \mathrm{B}(2,-5), \mathrm{C}(10,1)$ を通る円の方程式を，次の 2 通りの解法で求めなさい。

**解答 1** 求める円の中心を $\mathrm{P}(a,b)$，半径を $r$ とすると，円の方程式は

(1)

(1) が点 A, B, C を通ることから

(2)

(3)

(4)

(2) − (3) より（$X^2 - Y^2 = (X-Y)(X+Y)$ を使うと簡単）

$$\therefore \qquad (5)$$

(3) − (4) より

$$\therefore \qquad (6)$$

(5),(6) と (2) より

$$a = \qquad , \qquad b = \qquad , \qquad r^2 = \qquad (7)$$

ゆえに，求める円は

(8)

**解答 2**　線分 AB を直径とする円は

$$\therefore \tag{1}$$

直線 AB は

$$\therefore \tag{2}$$

(1),(2) の交点を通る円は次のように表される（定理 1.2）

$$\tag{3}$$

(3) が C を通るから

$$\therefore\ n = \tag{4}$$

(3),(4) より，求める円は

$$\therefore$$

$$\therefore \tag{5}$$

## 1.5　解答

**問題 1.1** 3 点 $\mathrm{A}(-2,7), \mathrm{B}(2,-5), \mathrm{C}(10,1)$ を通る円の方程式を，次の 2 通りの解法で求めなさい。

**解答 1**　求める円の中心を $\mathrm{P}(a,b)$，半径を $r$ とすると，円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1}$$

(1) が点 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ を通ることから

$$(-2-a)^2+(7-b)^2=r^2 \tag{2}$$
$$(2-a)^2+(-5-b)^2=r^2 \tag{3}$$
$$(10-a)^2+(1-b)^2=r^2 \tag{4}$$

(2) − (3) より

$$(-4)(-2a)+12(2-2b)=0$$
$$\therefore\ a-3b=-3 \tag{5}$$

(3) − (4) より

$$(-8)(12-2a)+(-6)(-4-2b)=0$$
$$\therefore\ 4a+3b=18 \tag{6}$$

(5),(6) と (2) より

$$a=3, \qquad b=2, \qquad r^2=50 \tag{7}$$

ゆえに，求める円は

$$(x-3)^2+(y-2)^2=50 \tag{8}$$

**注 1.4** 途中に現れた式の意味

(2)　$\mathrm{AP}^2=r^2$
(3)　$\mathrm{BP}^2=r^2$
(4)　$\mathrm{CP}^2=r^2$
(5)　AB の垂直二等分線（上に P がある）
(6)　BC の垂直二等分線（上に P がある）

**解答 2** 線分 AB を直径とする円は

$$(x+2)(x-2)+(y-7)(y+5)=0$$
$$\therefore\ x^2+y^2-2y-39=0 \tag{1}$$

直線 AB は

$$(7+5)(x+2)-(-2-2)(y-7)=0$$
$$\therefore\ 3x+y-1=0 \tag{2}$$

(1),(2) の交点を通る円は次のように表される

$$x^2+y^2-2y-39+n(3x+y-1)=0 \tag{3}$$

(3) が C を通るから

$$100+1-2-39+n(30+1-1)=0$$
$$\therefore\ n=-2 \tag{4}$$

(3),(4) より，求める円は

$$x^2+y^2-2y-39-2(3x+y-1)=0$$
$$\therefore\ x^2+y^2-6x-4y-37=0$$
$$\therefore\ (x-3)^2+(y-2)^2=50 \tag{5}$$