1　当たりが出るまでくじを引く回数の期待値

1.1　目的

ガラポン抽せん機の中に，赤玉（当たりくじ）が m 個，白玉（外れくじ）が $n-m$ 個，計 n 個入っている。初めて赤玉が出るのは平均して何回目か，つぎの 2 つの場合について調べる。

(1)　ガラポンをした後，玉を抽せん機に戻す（復元抽出）。

(2)　ガラポンをした後，玉を抽せん機に戻さない（非復元抽出）。

1.2　復元抽出の場合

この場合，毎回赤玉が出る確率は一定である。

1 回のガラポンで赤玉が出る確率 p は, $p = \dfrac{m}{n}$

k 回目に初めて赤玉が出る確率 $P(k)$ は, $P(k) = (1-p)^{k-1}p$

初めて赤玉が出るまでの回数の期待値 E は, $E = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1}$

E は，等差数列 $\{a_k = k\}$ と等比数列 $\left\{b_k = p(1-p)^{k-1}\right\}$ の積の数列 $\{a_k b_k\}$ の和の形をしている。付録の公式 1 を用いて

$$E = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} = \frac{n}{m}$$

1.3　非復元抽出の場合

この場合，毎回赤玉の出る確率が変化していく。

k 回目に初めて赤玉が出る確率 $P(k)$

2 通りの求め方を示す。

(1)　1〜$(k-1)$ 回に白玉が出て，k 回目に赤玉が出るから,

$$\begin{aligned}
P(k) &= \frac{{}_{n-m}\mathrm{P}_{k-1}}{{}_{n}\mathrm{P}_{k-1}} \frac{m}{n-k+1} \\
&= \frac{\dfrac{(n-m)!}{(n-m-k+1)!}}{\dfrac{n!}{(n-k+1)!}} \frac{m}{n-k+1} \\
&= \frac{(n-m)!\,(n-k)!\,m}{n!\,(n-m-k+1)!} \\
&= \frac{(n-m)!\,m!\,(n-k)!}{n!\,(n-m-k+1)!\,(m-1)!} \\
&= \frac{\dfrac{(n-k)!}{(n-k-m+1)!\,(m-1)!}}{\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}} \\
&= \frac{{}_{n-k}\mathrm{C}_{m-1}}{{}_{n}\mathrm{C}_{m}}
\end{aligned}$$

(2) 抽せん機が空になるまで，n 回ガラポンして出た玉を順に並べるとすると，そのような並べ方は，${}_n\mathrm{C}_m$ 通りある。

そのうち，初めの $k-1$ 個が白玉，k 番目が赤玉であるような並べ方は，残りの $n-k$ 個の中に赤玉が $m-1$ 個がどのように並ぶかということであるから，${}_{n-k}\mathrm{C}_{m-1}$ 通りある。

ゆえに

$$P(k) = \frac{{}_{n-k}\mathrm{C}_{m-1}}{{}_n\mathrm{C}_m}$$

初めて赤玉が出るまでの回数の期待値 E

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{k=1}^{n-m+1} k \cdot \frac{{}_{n-k}\mathrm{C}_{m-1}}{{}_n\mathrm{C}_m} \\
&= \frac{1}{{}_n\mathrm{C}_m} \sum_{k=1}^{n-m+1} {}_k\mathrm{C}_1 \cdot {}_{n-k}\mathrm{C}_{m-1} \\
&\quad \bigl(\text{付録の公式 2 より}\bigr) \\
&= \frac{{}_{n+1}\mathrm{C}_{m+1}}{{}_n\mathrm{C}_m} \\
&= \frac{n+1}{m+1}
\end{aligned}$$

1.4 付録

公式 1.1 等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ の積の数列 $\{a_nb_n\}$ の和

$$
\begin{aligned}
a_n &= a + d(n-1) \\
b_n &= br^{n-1} \ (r \neq 1) \\
S_n &= a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n
\end{aligned}
$$

とすると

$$
S_n = \frac{b\left(a_1 + (d-a_1)r - a_{n+1}r^n + a_nr^{n+1}\right)}{(1-r)^2}
$$

$$
\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b\,(a_1 + (d-a_1)r)}{(1-r)^2} \qquad \left(|r| < 1 \text{ のとき}\right)
$$

証明

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
S_n & = & a_1b_1 & + & a_2b_2 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{n-1}b_{n-1} & + & a_nb_n & & \\
rS_n & = & & & a_1b_2 & + & a_2b_3 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{n-1}b_n & + & a_nb_{n+1} \\
(1-r)S_n & = & a_1b_1 & + & \multicolumn{9}{c}{\underbrace{db_2 \ + \ db_3 \ + \ \cdots \ + \ db_{n-1} \ + \ db_n}_{\text{等比数列}}} & - & a_nb_{n+1}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1 + \frac{db_2\left(1 - r^{n-1}\right)}{1-r} - a_nb_{n+1} \\
&= \frac{a_1b_1 - a_1b_1r + db_2 - db_2r^{n-1} - a_nb_{n+1} + a_nb_{n+1}r}{1-r} \\
&= \frac{a_1b - a_1br + dbr - dbr^n - a_nbr^n + a_nbr^{n+1}}{1-r} \\
&= \frac{b\left(a_1 + (d-a_1)r - (a_n+d)r^n + a_nr^{n+1}\right)}{1-r} \\
&= \frac{b\left(a_1 + (d-a_1)r - a_{n+1}r^n + a_nr^{n+1}\right)}{1-r} \\
S_n &= \frac{b\left(a_1 + (d-a_1)r - a_{n+1}r^n + a_nr^{n+1}\right)}{(1-r)^2} \\
\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{b\,(a_1 + (d-a_1)r)}{(1-r)^2} \qquad \left(|r| < 1 \text{ のとき}\right)
\end{aligned}
$$

公式 1.2

$$\sum_{m=p}^{n-q} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_q = {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+1} \quad \bigl(p \geqq 0,\ q \geqq 0,\ p+q \leqq n\bigr)$$

証明 1

命題 $\displaystyle\sum_{m=p}^{n-q} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_q = {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+1}$ を $P_q(p,n)$ とする。

方針

$q = 0, 1, 2, \ldots$ に関する数学的帰納法によって,

任意の $p \geqq 0,\ n \geqq p+q$ について,

$P_q(p,n)$ が成り立つことを証明する。

注 1.1 つぎの方針では証明できない。

任意の $p \geqq 0,\ n \geqq p+q$ について,

$q = 0, 1, 2, \ldots$ に関する数学的帰納法によって,

$P_q(p,n)$ が成り立つことを証明する。

(i) $q = 0$ のとき成り立つことを示す。

目標 任意の $p \geqq 0,\ n \geqq p+q$ について, $\displaystyle\sum_{m=p}^{n} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_0 = {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+1}$

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{m=p}^{n} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_0 \\
&= \sum_{m=p}^{n} {}_m\mathrm{C}_p \\
&= {}_p\mathrm{C}_p + {}_{p+1}\mathrm{C}_p + {}_{p+2}\mathrm{C}_p + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_p + {}_n\mathrm{C}_p \\
&\qquad \bigl({}_p\mathrm{C}_p = 1 = {}_{p+1}\mathrm{C}_{p+1} \text{ だから}\bigr) \\
&= \underbrace{{}_{p+1}\mathrm{C}_{p+1} + {}_{p+1}\mathrm{C}_p} + {}_{p+2}\mathrm{C}_p + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_p + {}_n\mathrm{C}_p \\
&= \underbrace{{}_{p+2}\mathrm{C}_{p+1} + {}_{p+2}\mathrm{C}_p} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_p + {}_n\mathrm{C}_p \\
&= {}_{p+3}\mathrm{C}_{p+1} + \cdots + {}_{n-1}\mathrm{C}_p + {}_n\mathrm{C}_p \\
&\qquad \vdots \\
&= \underbrace{{}_n\mathrm{C}_{p+1} + {}_n\mathrm{C}_p} \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+1} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}$$

(ii) q のとき成り立つことを仮定して，$q+1$ のとき成り立つことを示す。

仮定　任意の $p \geqq 0,\ n \geqq p+q$ について，$\displaystyle\sum_{m=p}^{n-q} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_q = {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+1}$

目標　任意の $p \geqq 0,\ n \geqq p+q+1$ について，$\displaystyle\sum_{m=p}^{n-(q+1)} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_{q+1} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+(q+1)+1}$

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{m=p}^{n-(q+1)} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_{q+1} \\
&= \sum_{m=p}^{n-q-1} {}_m\mathrm{C}_p \cdot \frac{n-m}{q+1}{}_{n-m-1}\mathrm{C}_q \\
&= \frac{1}{q+1}\sum_{m=p}^{n-q-1} \left((n+1)-(m+1)\right){}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m-1}\mathrm{C}_q \\
&= \frac{1}{q+1}\left((n+1)\sum_{m=p}^{n-q-1} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m-1}\mathrm{C}_q \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \sum_{m=p}^{n-q-1} (m+1){}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m-1}\mathrm{C}_q\right) \\
&= \frac{1}{q+1}\left((n+1)\sum_{m=p}^{(n-1)-q} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{(n-1)-m}\mathrm{C}_q \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \sum_{m=p}^{n-q-1} (p+1){}_{m+1}\mathrm{C}_{p+1} \cdot {}_{n-(m+1)}\mathrm{C}_q\right) \\
&= \frac{1}{q+1}\left((n+1)\sum_{m=p}^{(n-1)-q} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{(n-1)-m}\mathrm{C}_q \right.\\
&\qquad\qquad \left. -\ (p+1)\sum_{m'=p+1}^{n-q} {}_{m'}\mathrm{C}_{p+1} \cdot {}_{n-m'}\mathrm{C}_q\right) \\
&\quad \left(\text{仮定 } P(p, n-1) \text{ と } P(n, p+1) \text{ より}\right) \\
&= \frac{1}{q+1}\left((n+1){}_{(n-1)+1}\mathrm{C}_{p+q+1} - (p+1){}_{n+1}\mathrm{C}_{(p+1)+q+1}\right) \\
&= \frac{1}{q+1}\left((p+q+2){}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+2} - (p+1){}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+2}\right) \\
&= \frac{1}{q+1}\left((q+1){}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+2}\right) \\
&= {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+(q+1)+1} \\
&= \text{右辺}
\end{aligned}
$$

証明終

証明 2

$\{1,2,3,\ldots,n,n+1\}$ から $p+q+1$ 個選ぶことを考える。
小さい方から $p+1$ 番目（大きい方から $q+1$ 番目）が $m+1$ であるような選び方を数える。

$\{1,2,\ldots,m\}$から p 個選ぶ選び方は${}_m\mathrm{C}_p$通りある。
$\{m+2,\ldots,n,n+1\}$から q 個選ぶ選び方は${}_{n-m}\mathrm{C}_q$通りある。
ゆえに,${}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_q$通りある。

m は $p \leqq m \leqq n-q$ の範囲を動くから,

$$\sum_{m=p}^{n-q} {}_m\mathrm{C}_p \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_q = {}_{n+1}\mathrm{C}_{p+q+1}$$