8 順列と組合せ

8.1 定義

定義 8.1 組合せ (combination)
n 個のものから k 個選ぶ選び方の総数を ${}_n\mathrm{C}_k$ で表す。

例 8.1 $n=3$ の場合

$k=3$	①②③	$\therefore {}_3\mathrm{C}_3=1$
$k=2$	①②，①③，②③	$\therefore {}_3\mathrm{C}_2=3$
$k=1$	①，②，③	$\therefore {}_3\mathrm{C}_1=3$
$k=0$	空	$\therefore {}_3\mathrm{C}_0=1$

定義 8.2 順列 (permutation)
n 個のものから k 個選んで並べる並べ方の総数を ${}_n\mathrm{P}_k$ で表す。

例 8.2 $n=3$ の場合

$k=3$	①②③，①③②，②①③，②③①，③①②，③②①	$\therefore {}_3\mathrm{P}_3=6$
$k=2$	①②，②①，①③，③①，②③，③②	$\therefore {}_3\mathrm{P}_2=6$
$k=1$	①，②，③	$\therefore {}_3\mathrm{P}_1=3$
$k=0$	空	$\therefore {}_3\mathrm{C}_0=1$

注 8.1 1 個ずつ取り出して並べるとき，

順列　　取り出した順に並べる。
組合せ　取り出した順に関係なく，番号順に並べる。

定義 8.3 階乗 (factorial)
n 個のものを全部並べる並べ方の総数 ${}_n\mathrm{P}_n$ を特に $n!$ で表す。

例 8.3 n 個のものを全部並べる並べ方
$n>0$ のとき，

$$\left.\begin{array}{ll} 1\text{ 番目の選び方} & n\text{ 通り} \\ 2\text{ 番目の選び方} & n-1\text{ 通り} \\ 3\text{ 番目の選び方} & n-2\text{ 通り} \\ \vdots & \\ n\text{ 番目の選び方} & 1\text{ 通り} \end{array}\right\} \quad \therefore\ n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 1$$

$n=0$ のとき，

空の 1 通り　$\therefore\ 0!=1$

8.2　公式

選び方や並べ方を変えていろいろな数え方をすることによって公式を導く。

例 8.4　n 個全部並べてから，同一視する並べ方をくくる。

順列　$\overbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{\text{同一視 }((n-k)!)}}^{n!\text{通り}}$　$\therefore\ {}_n\mathrm{P}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

組合せ　$\overbrace{\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{\text{同一視 }(k!)}\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc\bigcirc}_{\text{同一視 }((n-k)!)}}^{n!\text{通り}}$　$\therefore\ {}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

例 8.5　k 個選んで並べることを，選ぶことと並べることに分けて考える。

数え方 1　n 個から k 個選んで並べる
数え方 2　n 個から k 個選ぶ　そして　その k 個を並べる
$\therefore\quad {}_n\mathrm{P}_k = {}_n\mathrm{C}_k \times k!$

例 8.6　特定の◯を含むかどうかで場合分けする。

数え方 1　n 個から k 個選ぶ
数え方 2　①と①以外の $k-1$ 個選ぶ　または　①以外の k 個選ぶ
$\therefore\quad {}_n\mathrm{C}_k = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_k$

例 8.7　番号が最小の◯で場合分けする。

数え方 1　n 個から k 個選ぶ
数え方 2　ⓘと i より番号が大きい◯を $k-1$ 個選ぶ　$(i \geqq 1\ ,\ n-i \geqq k-1)$

$$\therefore\quad {}_n\mathrm{C}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} {}_{n-i}\mathrm{C}_{k-1}$$

例　${}_6\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 + {}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_2$

問題 8.1　n 人の中から，1 人の委員長と，$k-1$ 人の委員を選ぶ。

数え方 1　委員長を選ぶ　そして　残りから $k-1$ 人選ぶ
数え方 2　委員を k 人選ぶ　そして　その中から委員長を選ぶ
公式　${}_n\mathrm{C}_k =$

問題 8.2　n 人の中から，1 人の委員長と，k 人の委員を選ぶ。

数え方 2　委員を k 人選ぶ　そして　残りから委員長を選ぶ
数え方 2　委員を $k+1$ 人選ぶ　そして　その中から委員長を選ぶ
公式　${}_n\mathrm{C}_{k+1} =$

問題 8.3　○を k 個と●を $n-k$ 個，合わせて n 個を並べる。

数え方 1　○を置く位置を決める
数え方 2　●を置く位置を決める
公式　${}_n\mathrm{C}_k =$

問題 8.4 n 個から選ぶすべての組合せ

数え方 1 0 個選ぶ　または　1 個選ぶ　または　$\cdots$　または　n 個選ぶ

数え方 2 ①を選ぶか選ばないか　そして　$\cdots$　そして　ⓝを選ぶか選ばないか

公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k =$

問題 8.5 ○を n 個と●を n 個，合わせて $2n$ 個から n 個選ぶ。

数え方 1 色に関係なく n 個選ぶ

数え方 2 ○を k 個選ぶ　そして　●を $n-k$ 個選ぶ（$k=0,1,\ldots,n$）

ゆえに ${}_{2n}\mathrm{C}_n =$

問題 8.3 を使って書き換えると

公式 ${}_{2n}\mathrm{C}_n =$

定義 8.4

$G_n = n$ 個から偶数個選ぶ選び方の総数 $= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots$

$K_n = n$ 個から奇数個選ぶ選び方の総数 $= {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_3 + {}_n\mathrm{C}_5 + \cdots$

問題 8.6 $n \geqq 1$ のとき

数え方 1 n 個から偶数個選ぶ

数え方 2 ①と①以外から奇数個選ぶ　または　①以外から偶数個選ぶ

ゆえに $G_n =$

数え方 3 n 個から奇数個選ぶ

数え方 4 ①と①以外から偶数個選ぶ　または　①以外から奇数個選ぶ

ゆえに $K_n =$

公式

$\sum$ を使って表すと

公式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k {}_n\mathrm{C}_k =$

8.3 パスカルの三角形

${}_n\mathrm{C}_k$ を表にすると次のようになる。この表で，上で求めた公式を確認しなさい。

n＼k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0 :	1												
1 :	1	1											
2 :	1	2	1										
3 :	1	3	3	1									
4 :	1	4	6	4	1								
5 :	1	5	10	10	5	1							
6 :	1	6	15	20	15	6	1						
7 :	1	7	21	35	35	21	7	1					
8 :	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
9 :	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10 :	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11 :	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12 :	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

公式 8.1　整数の特徴

$$x > y \iff x \geqq y + 1$$
$$x < y \iff x \leqq y - 1$$

公式 8.2　不等式の加減

$$\begin{array}{rcl} a & \geqq & b \\ c & \geqq & d \\ \Rightarrow\ a + c & \geqq & b + d \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} a & \geqq & b \\ c & \leqq & d \\ \Rightarrow\ a - c & \geqq & b - d \end{array}$$

問題 8.7　9 つの整数を一列に並べて，次の条件を満たすようにしなさい。なるべく絶対値が小さい整数が望ましい。

連続して並んでいる 4 つの整数の和は正である。
連続して並んでいる 7 つの整数の和は負である。

問題 8.8　箱が m 個あって，1 番から m 番まで番号が付いている。それぞれの箱に，玉が n 個ずつ入っていて，1 番から n 番まで番号が付いている。
それぞれの箱から 1 個ずつ玉を取り出す。k 番目の箱から取り出した玉の番号を a_k とする。
このとき，つぎの条件を満たすような選び方が全部で何通りあるか。

(1)　$a_k\,(k = 1, 2, \ldots, m)$ がすべて異なる。

(2)　$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$

(3)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m$

(4)　$a_1 << a_2 << \cdots << a_m$
ただし，$x << y$ は x と y の間に 1 つ以上の整数がある $\bigl(\exists z(x < z < y)\bigr)$ ことを表す。

問題 8.9　○と●合わせて n 個を一列に並べる。ただし，●と●が隣り合ってはいけない（○と○は隣り合ってもよい）。このような並べ方の個数を f_n とする。
例. 3 個の場合，次の並べ方があるので，$f_3 = 5$。

○○○　○○●　○●○　●○○　●○●

(1)　●の個数 m に注目して，$f_n = \displaystyle\sum_{m=\square}^{\square} \square$ の形で表しなさい

(2)　最初に○を置く置き方と，最初に●を置く置き方が，それぞれ何通りあるか考えて，f_n を f_{n-1} と f_{n-2} を用いて表しなさい。

(3)　f_{11} を求めなさい。