質問

この問題で $\overrightarrow{d}$ として，$\overrightarrow{b}$ と $\overrightarrow{c}$ に垂直な単位ベクトルを考えるらしいのですが、どうやってそのように発想するのでしょうか．

> $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ は空間内の単位ベクトルで，任意の単位ベクトル $\overrightarrow{d}$ に対し，
>
> $$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2=k$$
>
> となる．定数 k の値を求めよ．

回答 解答を書く前に，いろいろと考察します．

(1) まず，特殊な $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ についてどうなるか調べます．

$\overrightarrow{a}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{b}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{c}=(0,0,1)$ とする．

$\overrightarrow{d}=(p,q,r)$ とおくと

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2=p^2+q^2+r^2=1$$

$\therefore\ k=1$

$k=1$ と目標がわかったので，考え易くなりました．

(2) 今度は，特殊な $\overrightarrow{d}$ について調べます．

$\overrightarrow{d}=\overrightarrow{a}$ とおくと

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2=\left|\overrightarrow{a}\right|^4+\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2+\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\right)^2\geqq\left|\overrightarrow{a}\right|^4=1$$

$\therefore\ k\geqq 1$

$k\geqq 1$ がわかったので，$k\leqq 1$ を示せばよいことになりました．

(3) やはり，特殊な $\overrightarrow{d}$ について調べますが，k を小さくしたいので，3 つの内積のうち 2 つを 0 にするものがあれば，それにしたいです．

空間ベクトルなので，$\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{b}$ かつ $\overrightarrow{d}\perp\overrightarrow{c}$ となる $\overrightarrow{d}$ がある．

$$\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+\left(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2=\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{d}\right)^2+0+0\leqq 1$$

$\therefore\ k\leqq 1$

$k=1$ とわかりました．

(4) 以上を踏まえて解答を書きます．