1　円を解にもつ微分方程式

中心が (a, b) で半径が r の円

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1.1}$$

を考える．

式 (1.1) を x で微分すると，

$$2(x-a) + 2(y-b)y' = 0$$
$$\therefore\ (x-a) + (y-b)y' = 0 \tag{1.2}$$

この微分方程式は，r が消えているので，中心が (a, b) で半径が任意の円群を表している．

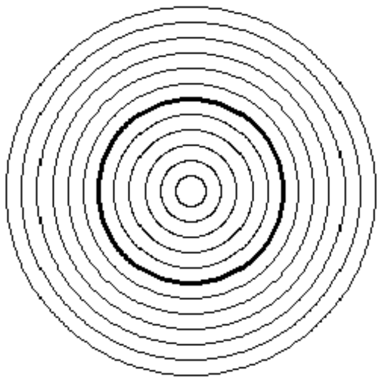
実際，微分方程式を解くと，

$$(x-a) = -(y-b)y'$$
$$\int (x-a)\,dx = -\int (y-b)y'\,dx = -\int (y-b)\,dy$$
$$\frac{1}{2}(x-a)^2 = -\frac{1}{2}(y-b)^2 + C$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 2C$$

左辺 $\geqq 0$ だから $2C = R^2$ とおける

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{1.2 解}$$

確かに，中心が (a, b) で半径が任意の円となる．



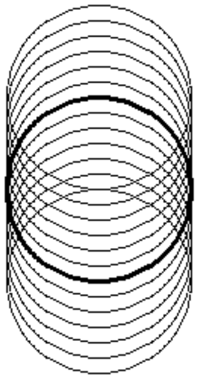
式 (1.1) と (1.2) から $(y-b)$ を消去すると

$$(x-a)^2\left((y')^2+1\right)=r^2(y')^2 \tag{1.3}$$

この微分方程式は，b が消えているので，中心の y 座標が任意の円，すなわち元の円 (1.1) を上下に移動した円群を表している．

これを解く．

$$\begin{aligned}
&(x-a)^2=\left(r^2-(x-a)^2\right)(y')^2\\
&y'=\pm\frac{(x-a)}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}\\
&y=\pm\int\frac{(x-a)}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}\,dx\\
&y=\mp\sqrt{r^2-(x-a)^2}+B\\
&(y-B)^2=r^2-(x-a)^2\\
&(x-a)^2+(y-B)^2=r^2
\end{aligned} \tag{1.3 解}$$



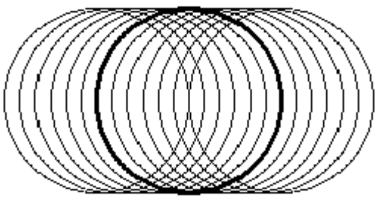
式 (1.1) と (1.2) から $(x-a)$ を消去すると

$$(y-b)^2((y')^2+1)=r^2 \tag{1.4}$$

この微分方程式は a が消えているので，中心の x 座標が任意の円，すなわち元の円 (1.1) を左右に移動した円群を表している．

これを解く．

$$\begin{aligned}
&(y-b)^2(y')^2=r^2-(y-b)^2\\
&1=\pm\frac{(y-b)}{\sqrt{r^2-(y-b)^2}}y'\\
&\int 1\,dx=\pm\int\frac{(y-b)}{\sqrt{r^2-(y-b)^2}}\,dy\\
&x=\mp\sqrt{r^2-(y-b)^2}+A\\
&x-A=\mp\sqrt{r^2-(y-b)^2}\\
&(x-A)^2=r^2-(y-b)^2\\
&(x-A)^2+(y-b)^2=r^2 \qquad (1.4\,解)
\end{aligned}$$



式 (1.2) をさらに x で微分すると

$$1+(y')^2+(y-b)y''=0 \tag{1.5}$$

式 (1.4) と (1.5) から $(y-b)$ を消去すると

$$\big(1+(y')^2\big)^3=r^2(y'')^2$$

$$r=\frac{\big(1+(y')^2\big)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \tag{1.6}$$

この二階微分方程式は，a と b が消えているので，半径が r で中心が任意の円群を表す．
これを解く．

$$z=y' \quad \text{とおく}$$

$$(1+z^2)^3=r^2(z')^2$$

$$1=\pm\frac{r}{\sqrt{(1+z^2)^3}}z'$$

$$x=\pm\frac{rz}{\sqrt{1+z^2}}+A \tag{注 1}$$

$$(x-A)^2=\frac{r^2z^2}{1+z^2}=r^2-\frac{r^2}{1+z^2}$$

$$\frac{r^2}{1+z^2}=r^2-(x-A)^2$$

$$1+z^2=\frac{r^2}{r^2-(x-A)^2}=1+\frac{(x-A)^2}{r^2-(x-A)^2}$$

$$z^2=\frac{(x-A)^2}{r^2-(x-A)^2}$$

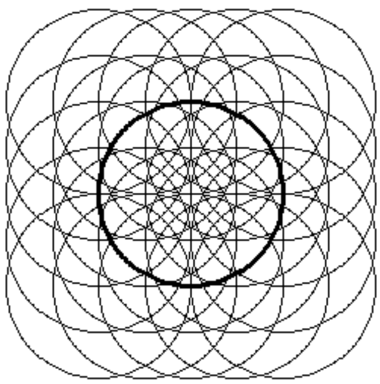
$$z=\pm\frac{(x-A)}{\sqrt{r^2-(x-A)^2}}$$

$$y'=\pm\frac{(x-A)}{\sqrt{r^2-(x-A)^2}}$$

$$y=\mp\sqrt{r^2-(x-A)^2}+B$$

$$(y-B)^2=r^2-(x-A)^2$$

$$(x-A)^2+(y-B)^2=r^2 \tag{1.6 解}$$



注 1. $F(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}\,dz$ の計算

・双曲線関数を知っている場合

$$
\begin{aligned}
&x = \sinh t \quad \text{とおく} \\
&\frac{dz}{dt} = \cosh t \\
&1 + x^2 = 1 + \sinh^2 t = \cosh^2 t
\end{aligned}
$$

$$F(x) = \int \frac{1}{\cosh^2 t}\,dz = \frac{\sinh t}{\cosh t} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

・双曲線関数を知らない場合

$$
\begin{aligned}
&x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) \ (t > 0) \ \text{とおく} \\
&\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t} \\
&1 + x^2 = \frac{1}{4}\left(4 + t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{4}\left(t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right)^2 \\
&\sqrt{1+x^2} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int \frac{1}{t\left(\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)\right)^2}\,dt \\
&= \int \frac{4t}{(t^2+1)^2}\,dt \\
&= -\frac{2}{t^2+1} + C \\
&= \frac{-\frac{1}{t}}{\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)} + C \\
&= \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} + C \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + C \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C'
\end{aligned}
$$

2　曲率円

曲線 $y=f(x)$ を道路とし，$x<0$ の方向から $x>0$ の方向に向かって，ドライブしていると考える．曲線上の点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ における接線は，そこを通った時に自動車が向いている方向を示している．その点でハンドルを切らずに進むと接線の上を直進する．

2 回微分した $f''(x_0)$ が正ならば左カーブ（下に凸），負ならば右カーブ（上に凸）である．しかし，$f''(x_0)$ の値を調べても，急なカーブか緩いカーブかはわからない．たとえば，放物線 $y=f(x)=x^2$ の $f''(x)=2$ は一定だが，頂点の近くは急カーブ，頂点から離れるほど緩やかになる．

カーブを曲がった時のハンドルの切り具合をそのまま維持して進むと，自動車は円を描く．急カーブだと小さい円，緩やかなカーブだと大きな円を描く．ゆえに，この円によってカーブの曲がり具合がわかる．この円を，その点における**曲率円**，その半径を**曲率半径**，曲率半径の逆数を**曲率**という．曲率が大きいほど急カーブである．

点 P_0 において曲率円の y',y'' の値は，それぞれ曲線の $y_0'=f'(x_0), y_0''=f''(x_0)$ と一致する．

定義 2.1 (曲率円) 曲線 $y=f(x)$ の上の点 $\mathrm{P}_0(x_0,y_0)$ において

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{\left(1+(y_0')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|y_0''|} && \cdots \quad \text{半径} && (1.6\ \text{より}) \\
b &= y_0 + \frac{1+(y_0')^2}{y_0''} && \cdots \quad \text{中心の } y \text{ 座標} && (1.5\ \text{より}) \\
a &= x_0 - \frac{1+(y_0')^2}{y_0''}\cdot y_0' && \cdots \quad \text{中心の } x \text{ 座標} && (1.2\ \text{より})
\end{aligned}
$$

によって定まる円を**曲率円**という．

例 2.1 放物線 $y=x^2$ 上の $x=0$ の点と $x=1$ の点における曲率円．

$$y=x^2 \quad y'=2x \quad y''=2$$

$x=0$ の点における曲率円

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 0 \\
y_0 &= 0 \\
y_0' &= 0 \\
y_0'' &= 2 \\
\therefore\ a &= 0-\frac{1+0^2}{2}\cdot 0 = 0 \\
b &= 0+\frac{1+0^2}{2} = \frac{1}{2} \\
r &= \frac{(1+0^2)^{\frac{3}{2}}}{|2|} = \frac{1}{2} \\
\therefore\ & x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$x=1$ の点における曲率円

$$
\begin{aligned}
x_0 &= 1 \\
y_0 &= 1 \\
y_0' &= 2 \\
y_0'' &= 2 \\
\therefore\ a &= 1-\frac{1+2^2}{2}\cdot 2 = -4 \\
b &= 1+\frac{1+2^2}{2} = \frac{7}{2} \\
r &= \frac{(1+2^2)^{\frac{3}{2}}}{|2|} = \frac{5\sqrt{5}}{2} \\
\therefore\ & (x+4)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$