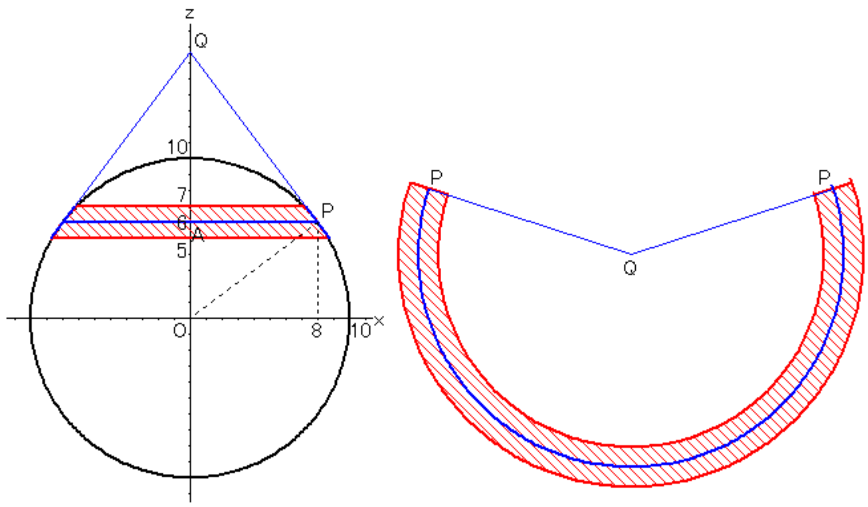
1　球の表面積

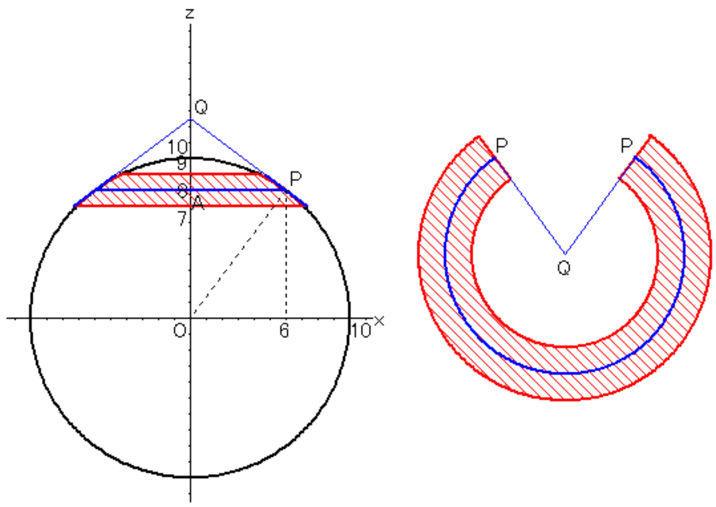
半径が r の球の表面積は，底円の半径が r で高さが $2r$ の円柱（球に外接している）の側面積と等しい。それだけではなく，球および円柱を厚さ h の円盤状にスライスしたそれぞれの側面積が等しい。

この事実を確かめるには，厳密には積分の計算をしないといけないが，積分を使わなくても，ある程度納得がいく説明はできる。

問題 1　半径が 10 の球を中心からの距離が 5 の平面と 7 の平面に挟まれた部分を考える。正面から見ると台形のような形をしているが，斜辺は円弧である。この円弧を中間点の接線で置き換えてできる真の台形を回転したもの（円錐台）の側面積 S を求めなさい。

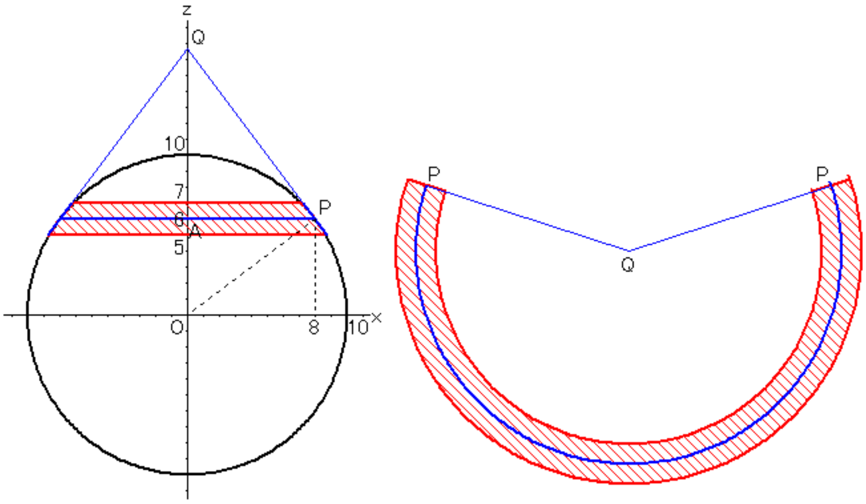


問題 2　中心からの距離が 7 と 9 の平面に挟まれた部分について，同様の面積 S を求めなさい。



解答

問題 1



左の図において，PQ は P(8, 6) における円の接線なので，

$$\angle \mathrm{OPQ} = 90^\circ$$
$$\therefore\ \triangle \mathrm{OPQ}\ と\ \triangle \mathrm{OAP}\ と\ \triangle \mathrm{PAQ}\ は相似$$
$$\therefore\ \mathrm{AQ} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}} \cdot \mathrm{PA} = \frac{64}{6}$$
$$\mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} \cdot \mathrm{PA} = \frac{80}{6}$$

右の図において，扇形が大中小 3 つあるが，まず中の扇形の面積を求める。

$$半径\ \mathrm{QP} = \frac{80}{6}$$
$$弧\ \mathrm{PP}' = 2\pi \mathrm{AP} = 16\pi$$
$$\therefore\ 面積\ S_{中} = \pi \left(\frac{80}{6}\right)^2 \cdot \frac{16\pi}{2\pi \frac{80}{6}} = \frac{640}{6}\pi$$

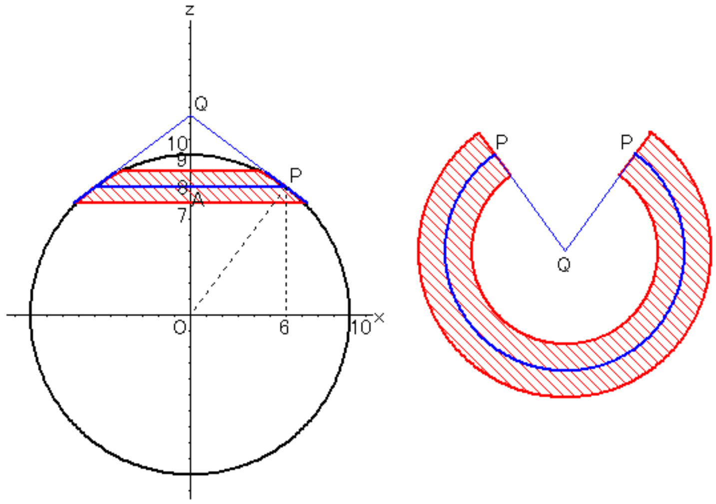
大中小の扇形は相似で相似比は

$$\mathrm{AQ} + 1 : \mathrm{AQ} : \mathrm{AQ} - 1 = \frac{64}{6} + 1 : \frac{64}{6} : \frac{64}{6} - 1 = 64 + 6 : 64 : 64 - 6$$
$$\therefore\ S_{大} : S_{中} : S_{小} = (64+6)^2 : 64^2 : (64-6)^2$$

求めたい面積 S は

$$S = S_{大} - S_{小} = S_{中}\left(\frac{(64+6)^2}{64^2} - \frac{(64-6)^2}{64^2}\right) = \frac{640}{6}\pi \cdot \frac{4 \cdot 64 \cdot 6}{64^2} = 40\pi$$

問題 2



左の図において，PQ は P(6, 8) における円の接線なので，

$$\angle \mathrm{OPQ} = 90^\circ$$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{OPQ}\ \text{と}\ \triangle\mathrm{OAP}\ \text{と}\ \triangle\mathrm{PAQ}\ \text{は相似}$$

$$\therefore\ \mathrm{AQ} = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}} \cdot \mathrm{PA} = \frac{36}{8}$$

$$\mathrm{PQ} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}} \cdot \mathrm{PA} = \frac{60}{8}$$

右の図において，扇形が大中小 3 つあるが，まず中の扇形の面積を求める。

$$\text{半径 QP} = \frac{60}{8}$$

$$\text{弧 PP}' = 2\pi\mathrm{AP} = 12\pi$$

$$\therefore\ \text{面積}\ S_{\text{中}} = \pi\left(\frac{60}{8}\right)^2 \cdot \frac{12\pi}{2\pi\frac{60}{8}} = \frac{360}{8}\pi$$

大中小の扇形は相似で相似比は

$$\mathrm{AQ}+1 : \mathrm{AQ} : \mathrm{AQ}-1 = \frac{36}{8}+1 : \frac{36}{8} : \frac{36}{8}-1 = 36+8 : 36 : 36-8$$

$$\therefore\ S_{\text{大}} : S_{\text{中}} : S_{\text{小}} = (36+8)^2 : 36^2 : (36-8)^2$$

求めたい面積 S は

$$S = S_{\text{大}} - S_{\text{小}} = S_{\text{中}}\left(\frac{(36+8)^2}{36^2} - \frac{(36-8)^2}{36^2}\right) = \frac{360}{8}\pi \cdot \frac{4\cdot 36\cdot 8}{36^2} = 40\pi$$

注 1　一般に，半径が r の球を中心からの距離が $a-d$ の平面と $a+d$ の平面に挟まれた部分について，同様の円錐台の側面積は，$4dr\pi$ となり位置 a に関係なく半径が r で厚さが $2d$ の円盤の側面積に等しい。

　したがって，球をいくつかにスライスして，すべての断片についての同様の円錐台の側面積を足し合わせると，外接する円柱の側面積と一致する。スライスする厚さをどんどん薄くしていくと，円錐台の側面は球面に限りなく近づいていく。ゆえに，球の表面積は外接する円柱の側面積と一致すると思われる。