

ローンの返済額

教科書のコラムにあるように、年利率 8 % で 100 万円を借りた場合、10 年後には約 216 万円になる（正確には 2,158,925 円）。10 年後に一括して返済する場合はこの金額を返すことになる。

これを 1 年後から始めて毎年 1 回返済し、10 年後に完済するようにローンを組みたいとする。いくらずつ返済したらよいだろうか。

考え方 1 毎年の返済額を A 円、 n 年後の借入残高を x_n 円とする。

0 年後、すなわち借入時の残高は、借入額 100 万円である。

$$x_0 = 1000000 \quad (1)$$

$k+1$ 年後の残高は、 k 年後の残高に、それに対する利息と、返済額をそれぞれ増減したものである。

$$x_{k+1} = x_k + 0.08x_k - A = 1.08x_k - A \quad (2)$$

これから、一般項 x_n を求めよう。

$$\alpha = 1.08\alpha - A \quad (3)$$

とおくと

$$\alpha = \frac{A}{0.08}$$

(2) - (3) より

$$x_{k+1} - \alpha = 1.08(x_k - \alpha)$$

ゆえに

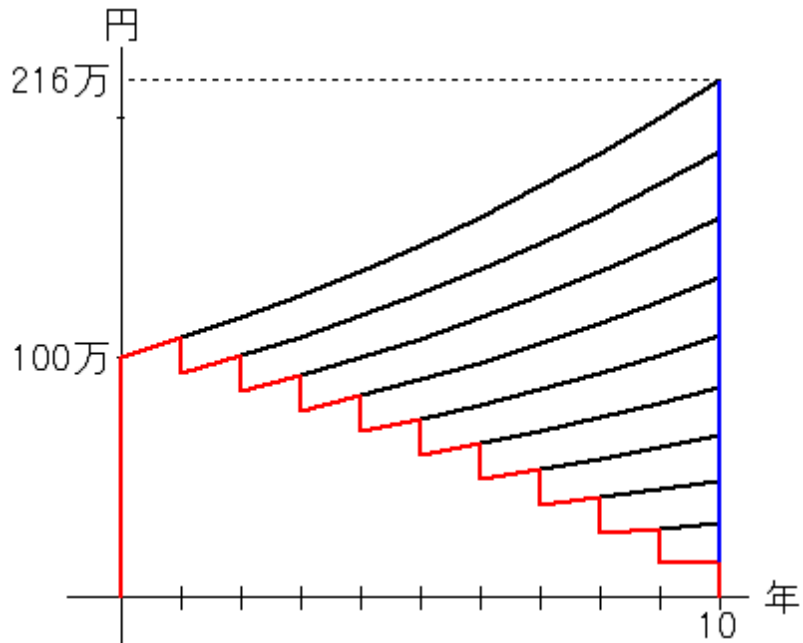
$$x_n - \alpha = 1.08^n(x_0 - \alpha)$$

$$x_n = 1.08^n x_0 - (1.08^n - 1)\alpha = 1000000 \times 1.08^n - (1.08^n - 1) \frac{A}{0.08}$$

$x_{10} = 0$ にしたいのだから

$$A = \frac{80000 \times 1.08^{10}}{1.08^{10} - 1} = \frac{80000 \times 2.158925}{2.158925 - 1} = 149029$$

毎年の返済額が 149,029 円で、10 年間で 1,490,290 円返済することになる。



考え方2 図の一番上のグラフは、100万円が毎年利息分増えて、10年後に約216万円になる様子
を示している。

一番下のギサギザのグラフは、毎年利息分が増え返済分が減って、10年後に完済の様子を
示している。

上から2番目のグラフは、1回返済した後の残高をそのままにしておいた場合、どのように
増えていくかを示している。一番上のグラフとの差を見ると、1回目に返済した金額に毎年
利息がついて増えていく様子わかる。

3番目以降のグラフについても同様である。

右端の縦の線を見ると、返済した金額にそれぞれの期間分の利息がついて、それらの合計が
216万円になっていることがわかる。

すなわち、

$$\begin{aligned}
 1000000 \times 1.08^{10} &= A \times 1.08^9 + A \times 1.08^8 + \dots + A \times 1.08 + A \\
 &= \frac{A(1.08^{10} - 1)}{1.08 - 1} = \frac{A(1.08^{10} - 1)}{0.08}
 \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{0.08 \times 1000000 \times 1.08^{10}}{1.08^{10} - 1} = \frac{80000 \times 2.158925}{2.158925 - 1} = 149029$$

一般に 元金 G 円、年利率 $R\%$ 、1年に返済する回数 m 回、返済年数 y 年のローンの、1回の返
済額 A はつぎのようになる。

$$A = \frac{Gr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \quad \left(\text{ただし } r = \frac{R}{100m}, \quad n = my \right)$$