

1 自然演繹体系の証明例 (命題編)

1.1 問題 1

直観論理プラス「排中律」 \iff 直観論理プラス「二重否定の原理」

(1) $\implies P \vee \neg P$ (二重否定の原理を用いて)

(2) $\neg\neg P \implies P$ (排中律を用いて)

直観論理プラス「パースの法則」 \iff 直観論理プラス「二重否定の原理」

(3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow P \implies P$ (二重否定の原理を用いて)

(4) $\neg\neg P \implies P$ (パースの法則を用いて)

1.2 問題 2

ド・モルガンの法則

(1) $\neg P \wedge \neg Q \iff \neg(P \vee Q)$

(2) $\neg P \vee \neg Q \iff \neg(P \wedge Q)$ (\iff は古典)

分配法則

(3) $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

(4) $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

吸収法則

(5) $(P \vee Q) \wedge \neg Q \iff P \wedge \neg Q$

(6) $(P \wedge Q) \vee \neg Q \implies P \vee \neg Q$ (\iff は古典)

対偶の性質

(7) $P \rightarrow Q \implies \neg Q \rightarrow \neg P$ (\iff は古典)

\rightarrow の性質

(8) $P \rightarrow Q \iff \neg P \vee Q$ (\implies は古典)

(9) $\neg(P \rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q$ (\implies は古典)

(10) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \iff (P \vee Q) \rightarrow R$

(11) $(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \iff (P \wedge Q) \rightarrow R$ (\iff は古典)

(12) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \iff (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ (\implies は古典)

1.3 解答 1

直観論理プラス排中律 \iff 直観論理プラス二重否定の原理

(1) $\implies P \vee \neg P$ (二重否定の原理を用いて)

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P \vee \neg P} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg(P \vee \neg P)}{\frac{\perp}{\neg P} \text{ (*1)} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg(P \vee \neg P)}{\neg(P \vee \neg P)}}}{\frac{\perp}{\neg\neg(P \vee \neg P)} \text{ (*2)}} \quad P \vee \neg P$$

(2) $\neg\neg P \implies P$ (排中律を用いて)

$$\frac{\frac{\text{排中律} \quad P \vee \neg P \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg P \quad \text{前提} \quad \neg\neg P}{\perp} \quad P \text{ (*1)}}{\neg\neg P}}{P}$$

(3) $(P \rightarrow Q) \rightarrow P \implies P$ (二重否定の原理を用いて)

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad \neg P}{\frac{\perp}{Q} \text{ (*1)} \quad \frac{\text{前提} \quad (P \rightarrow Q) \rightarrow P \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad \neg P}{P \rightarrow \neg P}}}{\frac{\perp}{\neg\neg P} \text{ (*2)}} \quad P$$

(4) $\neg\neg P \implies P$ (パースの法則を用いて)

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad P \rightarrow \neg P}{\neg P} \quad \frac{\perp}{\neg P} \text{ (*1)} \quad \text{前提} \quad \neg\neg P}{\frac{\perp}{P} \text{ (*2)}} \quad (P \rightarrow \neg P) \rightarrow P$$

1.4 解答 2

ド・モルガンの法則

$$(1) \neg P \wedge \neg Q \iff \neg(P \vee Q)$$

$$(1-1) \neg P \wedge \neg Q \implies \neg(P \vee Q)$$

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*3)} \quad P}{P \vee Q} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg P \wedge \neg Q}{\neg P} \quad \text{前提}}{\perp} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg P \wedge \neg Q}{Q} \quad \text{前提}}{\neg Q}}{\perp} \quad (*1)}{\frac{\perp}{\neg(P \vee Q)}} \quad (*2)$$

$$(1-2) \neg(P \vee Q) \implies \neg P \wedge \neg Q$$

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P \vee Q} \quad \frac{\text{前提}}{\neg(P \vee Q)}}{\frac{\perp}{\neg P}} \quad (*1) \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad Q}{P \vee Q} \quad \frac{\text{前提}}{\neg(P \vee Q)}}{\frac{\perp}{\neg Q}} \quad (*1)}{\neg P \wedge \neg Q}$$

$$(2) \neg P \vee \neg Q \iff \neg(P \wedge Q) \quad (\iff \text{は古典})$$

$$(2-1) \neg P \vee \neg Q \implies \neg(P \wedge Q)$$

$$\frac{\frac{\text{前提}}{\neg P \vee \neg Q} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P \wedge Q}{P} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \neg P}{\perp} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P \wedge Q}{Q} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \neg Q}{\perp}}{\perp} \quad (*1)}{\neg(P \wedge Q)} \quad (*2)$$

$$(2-2) \neg(P \wedge Q) \implies \neg P \vee \neg Q \quad (\text{古典})$$

$$\frac{\frac{\text{排中律}}{Q \vee \neg Q} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad Q}{P \wedge Q} \quad \text{前提}}{\perp} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg Q}{\neg P \vee \neg Q}}{\frac{\perp}{\neg P}} \quad (*1)}{\frac{\perp}{\neg P \vee \neg Q}} \quad (*2)$$

(2-2) $\neg(P \wedge Q) \implies \neg P \vee \neg Q$ (古典)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{假定}^{(*1)} \quad \text{假定}^{(*2)} \\
 \frac{P \quad Q}{P \wedge Q} \quad \text{前提} \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{\neg P} \quad (*1) \quad \text{假定}^{(*3)} \\
 \frac{\neg P}{\neg P \vee \neg Q} \quad \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{\neg Q} \quad (*2) \quad \text{假定}^{(*3)} \\
 \frac{\neg Q}{\neg P \vee \neg Q} \quad \neg(\neg P \vee \neg Q) \\
 \hline
 \perp \\
 \frac{\perp}{\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)} \quad (*3) \\
 \frac{\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)}{\neg P \vee \neg Q}
 \end{array}
 \end{array}$$

(分配法則)

$$(3) P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$(3-1) P \vee (Q \wedge R) \implies (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$\frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ P \vee (Q \wedge R) \end{array} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P \vee Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P \vee R} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad Q \wedge R}{Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad Q \wedge R}{R}}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)} \quad (*1)$$

$$(3-2) (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \implies P \vee (Q \wedge R)$$

$$\frac{\frac{\text{前提} \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee R} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P}{P \vee (Q \wedge R)} \quad \frac{\text{前提} \quad (P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P \vee (Q \wedge R)} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad Q \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad R}{Q \wedge R}}{P \vee (Q \wedge R)} \quad \begin{array}{l} (*1) \\ (*2) \end{array}$$

$$(4) P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$(4-1) P \wedge (Q \vee R) \implies (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$\frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ P \wedge (Q \vee R) \end{array} \quad \frac{\text{前提} \quad P \wedge (Q \vee R)}{Q \vee R} \quad \frac{\text{前提} \quad P \wedge (Q \vee R)}{P} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad Q}{Q} \quad \frac{\text{前提} \quad P \wedge (Q \vee R)}{P} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad R}{R}}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)} \quad (*1)$$

$$(4-2) (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \implies P \wedge (Q \vee R)$$

$$\frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ (P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \end{array} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \wedge Q}{P} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \wedge Q}{Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \wedge R}{P} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \wedge R}{R}}{P \wedge (Q \vee R)} \quad (*1)$$

吸収法則

(5) $(P \vee Q) \wedge \neg Q \iff P \wedge \neg Q$

(5-1) $(P \vee Q) \wedge \neg Q \implies P \wedge \neg Q$

$$\frac{\frac{\text{前提}}{(P \vee Q) \wedge \neg Q} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \frac{\frac{\text{前提}}{(P \vee Q) \wedge \neg Q} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \frac{Q}{\neg Q}}{\perp}}{P}}{P} \quad \frac{\text{前提}}{(P \vee Q) \wedge \neg Q} \quad \frac{\neg Q}{\neg Q}}{P \wedge \neg Q} \quad (*1)$$

(5-2) $P \wedge \neg Q \implies (P \vee Q) \wedge \neg Q$

$$\frac{\frac{\text{前提}}{P \wedge \neg Q} \quad \frac{\text{前提}}{P \wedge \neg Q}}{\frac{P \vee Q}{\neg Q}} \quad \frac{P \wedge \neg Q}{\neg Q}}{(P \vee Q) \wedge \neg Q}$$

(6) $(P \wedge Q) \vee \neg Q \iff P \vee \neg Q$ (\iff は古典)

(6-1) $(P \wedge Q) \vee \neg Q \implies P \vee \neg Q$

$$\frac{\text{前提} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \frac{P \wedge Q}{P}}{\neg Q}}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg Q}{P \vee \neg Q}}{P \vee \neg Q} \quad (*1)$$

(6-2) $P \vee \neg Q \implies (P \wedge Q) \vee \neg Q$ (古典)

$$\frac{\text{前提} \quad \frac{\text{排中律} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad Q}{\neg Q}}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg Q}{(P \wedge Q) \vee \neg Q}}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad (*1) \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg Q}{(P \wedge Q) \vee \neg Q}}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad (*2)$$

(6-2) $P \vee \neg Q \implies (P \wedge Q) \vee \neg Q$ (古典)

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg Q}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg((P \wedge Q) \vee \neg Q)}{\perp}}{\frac{\perp}{\neg \neg Q}} \quad (*1) \quad \frac{\text{仮定}^{(*3)} \quad P}{P \wedge Q} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg((P \wedge Q) \vee \neg Q)}{\neg((P \wedge Q) \vee \neg Q)}}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad \frac{\text{前提} \quad P \vee \neg Q}{\frac{\perp}{\neg \neg((P \wedge Q) \vee \neg Q)}} \quad (*2) \quad \frac{\text{仮定}^{(*3)} \quad \neg Q}{(P \wedge Q) \vee \neg Q}}{(P \wedge Q) \vee \neg Q} \quad (*3)$$

対偶の性質

(7) $P \rightarrow Q \implies \neg Q \rightarrow \neg P$ (\Leftarrow は古典)

(7-1) $P \rightarrow Q \implies \neg Q \rightarrow \neg P$

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \text{前提}}{P \quad P \rightarrow Q} \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad \neg Q}{Q \quad \neg Q} \quad \perp}{\neg P} \quad (*1)$$

$$\frac{\neg P}{\neg Q \rightarrow \neg P} \quad (*2)$$

(7-2) $\neg Q \rightarrow \neg P \implies P \rightarrow Q$ (古典)

$$\frac{\frac{\text{排中律} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \text{前提}}{Q \vee \neg Q \quad Q \quad P \quad \neg Q \quad \neg Q \rightarrow \neg P} \quad \neg P}{Q \quad Q} \quad (*1)$$

$$\frac{Q}{P \rightarrow Q} \quad (*2)$$

(7-2) $\neg Q \rightarrow \neg P \implies P \rightarrow Q$ (古典)

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad \text{前提}}{P \quad \neg Q \quad \neg Q \rightarrow \neg P} \quad \neg P}{\perp} \quad \neg \neg Q \quad (*1)$$

$$\frac{\neg \neg Q}{Q} \quad (*2)$$

$$\frac{Q}{P \rightarrow Q} \quad (*2)$$

→ の性質

(8) $P \rightarrow Q \iff \neg P \vee Q$ (\implies は古典)

(8-1) $P \rightarrow Q \implies \neg P \vee Q$ (古典)

$$\frac{\begin{array}{c} \text{仮定}^{(*1)} \\ P \\ \hline \text{排中律} \\ P \vee \neg P \end{array}}{\begin{array}{c} \text{前提} \\ P \rightarrow Q \\ \hline Q \\ \hline \neg P \vee Q \end{array}} \frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad \neg P}{\neg P \vee Q} \quad (*1)$$

(8-1) $P \rightarrow Q \implies \neg P \vee Q$ (古典)

$$\frac{\begin{array}{c} \text{仮定}^{(*1)} \\ \neg P \\ \hline \neg P \vee Q \end{array}}{\perp} \frac{\begin{array}{c} \text{仮定}^{(*2)} \\ \neg(\neg P \vee Q) \\ \hline \perp \end{array}}{\neg\neg P \quad (*1)} \frac{\text{前提} \quad P \rightarrow Q}{Q} \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad \neg(\neg P \vee Q)}{\neg P \vee Q} \quad (*2)$$

(8-2) $\neg P \vee Q \implies P \rightarrow Q$

$$\frac{\begin{array}{c} \text{前提} \\ \neg P \vee Q \end{array}}{\begin{array}{c} \text{仮定}^{(*2)} \\ P \\ \hline \perp \\ Q \end{array}} \frac{\begin{array}{c} \text{仮定}^{(*1)} \\ \neg P \\ \hline \perp \\ Q \end{array}}{Q} \quad (*1)$$

$$\frac{Q}{P \rightarrow Q} \quad (*2)$$

(9) $\neg(P \rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q$ (\implies は古典)

(9-1) $\neg(P \rightarrow Q) \implies P \wedge \neg Q$ (古典)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*1)} \\
 P \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 Q \\
 \hline
 P \rightarrow Q \quad (*1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*2)} \\
 \neg P \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 P \\
 \hline
 P \quad (*2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{前提} \\
 \neg(P \rightarrow Q) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 P \\
 \hline
 P \quad (*2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*3)} \\
 Q \\
 \hline
 P \rightarrow Q \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg Q \quad (*3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{前提} \\
 \neg(P \rightarrow Q) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg Q \quad (*3)
 \end{array}
 \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \text{排中律} \\
 P \vee \neg P \\
 \hline
 P \quad \text{仮定}^{(*2)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 P \\
 \hline
 P \quad (*2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 P \\
 \hline
 P \quad (*2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 P \wedge \neg Q
 \end{array}
 \end{array}$$

(9-1) $\neg(P \rightarrow Q) \implies P \wedge \neg Q$ (古典)

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*1)} \\
 P \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 Q \\
 \hline
 P \rightarrow Q \quad (*1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*2)} \\
 \neg P \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg\neg P \quad (*2) \\
 \hline
 P \\
 \hline
 P \quad (*2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{前提} \\
 \neg(P \rightarrow Q) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 P \\
 \hline
 P \quad (*2)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*3)} \\
 Q \\
 \hline
 P \rightarrow Q \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg Q \quad (*3)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{前提} \\
 \neg(P \rightarrow Q) \\
 \hline
 \perp \\
 \hline
 \neg Q \quad (*3)
 \end{array}
 \\
 \hline
 P \wedge \neg Q
 \end{array}$$

(9-2) $P \wedge \neg Q \implies \neg(P \rightarrow Q)$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{前提} \\
 P \wedge \neg Q \\
 \hline
 P
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{仮定}^{(*1)} \\
 P \rightarrow Q \\
 \hline
 Q
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \text{前提} \\
 P \wedge \neg Q \\
 \hline
 \neg Q
 \end{array}
 \\
 \hline
 \begin{array}{c}
 \perp \\
 \hline
 \neg(P \rightarrow Q) \quad (*1)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$(10) \quad (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \iff (P \vee Q) \rightarrow R$$

$$(10-1) \quad (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \implies (P \vee Q) \rightarrow R$$

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P}{P \vee Q} \quad \frac{\frac{\text{前提} \quad (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)}{P \rightarrow R} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad Q}{R} \quad \frac{\frac{\text{前提} \quad (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)}{Q \rightarrow R} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad P}{R}}{R} \quad (*1)}{(P \vee Q) \rightarrow R} \quad (*2)$$

$$(10-2) \quad (P \vee Q) \rightarrow R \implies (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$$

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P}{P \vee Q} \quad \frac{\text{前提} \quad (P \vee Q) \rightarrow R}{R} \quad \frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad Q}{P \vee Q} \quad \frac{\text{前提} \quad (P \vee Q) \rightarrow R}{R}}{\frac{\frac{R}{P \rightarrow R} \quad (*1)}{(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)} \quad \frac{R}{Q \rightarrow R} \quad (*2)}}{(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)}$$

$$(11) \quad (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \iff (P \wedge Q) \rightarrow R \quad (\iff \text{は古典})$$

$$(11-1) \quad (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \implies (P \wedge Q) \rightarrow R$$

$$\frac{\frac{\text{前提} \quad (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P \wedge Q}{P} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad P \rightarrow R}{R} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad P \wedge Q}{Q} \quad \text{仮定}^{(*1)} \quad Q \rightarrow R}{R}}{R} \quad (*1)}{(P \wedge Q) \rightarrow R} \quad (*2)$$

$$(11-2) \quad (P \wedge Q) \rightarrow R \implies (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \quad (\text{古典})$$

$$\frac{\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \quad \text{仮定}^{(*3)} \quad Q}{P \wedge Q} \quad \text{前提} \quad (P \wedge Q) \rightarrow R}{R} \quad \frac{\frac{\text{仮定}^{(*2)} \quad Q \quad \text{仮定}^{(*3)} \quad \neg Q}{\perp}}{R}}{\frac{\text{排中律} \quad Q \vee \neg Q}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \frac{R}{Q \rightarrow R} \quad (*1)}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad (*2)}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad (*3)$$

$$(11-2) \quad (P \wedge Q) \rightarrow R \implies (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \quad (\text{古典})$$

$$\frac{\frac{\text{仮定}^{(*1)} \quad P \quad \text{仮定}^{(*2)} \quad Q}{P \wedge Q} \quad \text{前提} \quad (P \wedge Q) \rightarrow R}{R} \quad \frac{\frac{R}{P \rightarrow R} \quad (*1)}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \frac{\text{仮定}^{(*3)} \quad \neg((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))}{\perp}}{\frac{\frac{R}{Q \rightarrow R} \quad (*2)}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad \frac{\text{仮定}^{(*3)} \quad \neg((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))}{\perp}}{\frac{\neg \neg((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))}{(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)} \quad (*3)}$$

(12) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \iff (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ (\implies は古典)

(12-1) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \implies (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ (古典)

$$\frac{\frac{\frac{P}{\text{仮定}^{(*1)}} \quad \frac{Q}{\text{仮定}^{(*1)}}}{P \wedge Q} \quad \frac{\frac{P \rightarrow Q \wedge (\neg P \rightarrow R)}{\text{前提}}}{P \rightarrow Q}}{P \vee \neg P} \quad \frac{\frac{\frac{\neg P}{\text{仮定}^{(*1)}} \quad \frac{R}{\text{前提}}}{\neg P \wedge R}}{\frac{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)}{(*1)}}}{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)} \quad (*1)$$

(12-1) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R) \implies (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$ (古典)

$$\frac{\frac{\frac{P}{\text{仮定}^{(*1)}} \quad \frac{Q}{\text{仮定}^{(*1)}}}{P \wedge Q} \quad \frac{\frac{P \rightarrow Q \wedge (\neg P \rightarrow R)}{\text{前提}}}{P \rightarrow Q}}{\frac{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)}{(*1)}} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg P}}{\neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R))} \quad \text{仮定}^{(*2)}$$

を

$$\frac{\perp}{\neg P}$$

と略記する。

$$\frac{\frac{\frac{\perp}{\neg P}}{\neg P \wedge R} \quad \frac{\frac{\frac{P \rightarrow Q \wedge (\neg P \rightarrow R)}{\text{前提}}}{\neg P \rightarrow R}}{R}}{\frac{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)}{(*1)}} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R))} \quad \text{仮定}^{(*2)}}{\frac{(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)}{(*2)}}$$

(12-2) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R) \implies (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$

$$\frac{\frac{\frac{P \wedge Q}{\text{前提}}}{P \rightarrow Q} \quad \frac{\frac{\frac{P \wedge Q}{\text{仮定}^{(*3)}} \quad \frac{\perp}{\text{仮定}^{(*1)}}}{\neg P \rightarrow R}}{\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)}{(*1)}} \quad \frac{\frac{\frac{\frac{\neg P \wedge R}{\text{仮定}^{(*3)}}}{\neg P}}{P \rightarrow Q} \quad \frac{\frac{\perp}{\neg P \wedge R}}{(*2)}}{\frac{(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)}{(*2)}}}{(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)} \quad (*3)$$