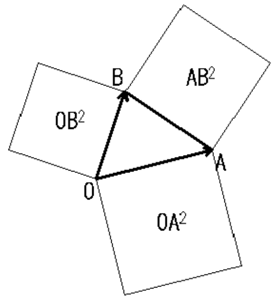
1　ベクトルの内積

1.1　内積の定義



2つのベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ に対して，$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる O, A, B をとります．このとき，

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right)$$

で表される数を $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ と $\overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ の**内積**（ないせき）といい，$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{b}}$ で表します．

ベクトルの内積

$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right)$$

1.2　成分で表されたベクトルの内積

$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{b}} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((a_1^2 + a_2^2) + (b_1^2 + b_2^2) - \left((b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 - (b_1 - a_1)^2 + a_2^2 + b_2^2 - (b_2 - a_2)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2a_1b_1 + 2a_2b_2\right) \\
&= a_1b_1 + a_2b_2
\end{aligned}$$

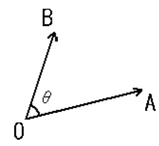
ベクトルの内積

$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{\boldsymbol{b}} = (b_1, b_2)$ のとき

$$\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{b}} = a_1b_1 + a_2b_2$$

1.3　2つのベクトルのなす角と内積

$\vec{\mathbf{0}}$ でない2つのベクトル $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に対して，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさ θ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **なす角** といいます．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とします.



$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が θ のとき，余弦定理より

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta$$

よって

$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \left(\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - 2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta\right)\right) \\
&= \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta \\
&= \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta
\end{aligned}$$

ベクトルの内積

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が θ のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$$

1.4　参考図