1　ネイピアの定数数

指数関数 $y = a^x$ のグラフは，y 軸と A$(0, 1)$ で交わり，$a > 1$ のとき図のような右上がりの曲線になります.

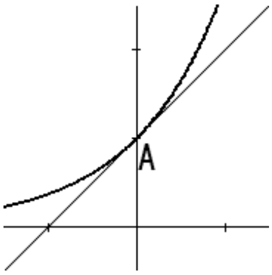

図 1 $(a = e)$

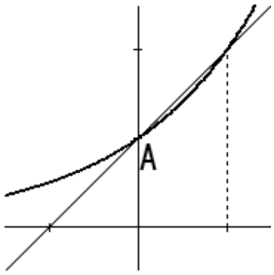

図 2 $(a = 2)$

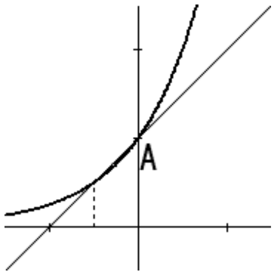

図 3 $(a = 4)$

$f(x) = a^x$ の導関数は

$$(a^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^x\ a^h - a^x}{h} = a^x\ \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = f'(0)\ a^x$$

となります.

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1$$

となる a を考えると

$$(a^x)' = a^x$$

となり便利です．ですから，この a を e と名付けます.

定義 1.1

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

これは黙示的な定義でわかりにくいですが，明示的に

$$e = \sim$$

の形で定義できないでしょうか？

$y = e^x$ の点 A における接線は $y = x + 1$ です（図 1）.
e 以外の a について，$y = a^x$ は $y = x + 1$ と A 以外の交点をもちます.
$1 < a < e$ のとき，$x > 0$ で交わります．たとえば，$a = 2$ のとき，$x = 1$ で交わります（図 2）.
$a > e$ のとき，$x < 0$ で交わります．たとえば，$a = 4$ のとき，$x = -\dfrac{1}{2}$ で交わります（図 3）.

問題 1.1 $y = a^x$ のグラフが直線 $y = x + 1$ と $x = \dfrac{1}{n}$ で交わるような a を求めなさい.

解答 1.1

$$a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} + 1 \qquad \therefore\ a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

問題 1.2 $y = a^x$ のグラフが直線 $y = x+1$ と $x = -\dfrac{1}{n+1}$ で交わるような a を求めなさい.

解答 1.2

$$a^{-\frac{1}{n+1}} = -\frac{1}{n+1} + 1$$

$$\therefore\ a = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+1)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

問題 1.3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ を求めなさい.

解答 1.3

問題 1.1 より　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$

問題 1.2 より　$e < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

ゆえに　$\dfrac{e}{1+\dfrac{1}{n}} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < e$

$n \to \infty$ とすると　$e \leqq \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqq e$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

定義 1.2 (Napier(ネイピア)の定数)

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

明示的に定義できました.

問題 1.4 (e の近似値) 加減乗除の他に 2 乗ができる電卓[*1] を使って，次の計算をしてください.

(1) 2^{32} を計算して，値をメモする（n とする）.

(2) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ を計算して，値をメモする（e_1 とする）.

(3) $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ を計算して，値をメモする（e_2 とする）.

(4) $e_1 < e < e_2$ より，e の近似値を求める.

[答]

(1) 2 に $\boxed{2\ 乗}$ を 5 回行う.

(2) $\dfrac{n+1}{n}$ に $\boxed{2\ 乗}$ を 32 回行う.

(3) $\dfrac{n}{n-1}$ に $\boxed{2\ 乗}$ を 32 回行う.

[*1] たとえば,「数学プログラム」のページにある「分数電卓」