1　はじめに

次の条件を満たす n **次関数** $f_n(x)$ を考える。

$$f_n(1)=1,\quad f_n(2)=2,\quad \ldots,\quad f_n(n)=2^{n-1},\quad f_n(n+1)=2^n \tag{1}$$

$f_n(x)$ は一意的に定まるが，この $f_n(x)$ に関する次の 2 つの問が興味深い。

問 (1)　$f_n(n+2)$ の値は何か。

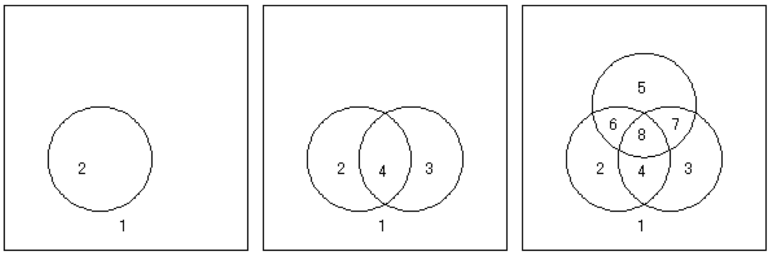
問 (2)　$m>n+1$ で $f_n(m)$ が 2 の累乗になることがあるか。

第 2 節で，この問題を考えつく元になった 2 つの具体的な数列を取り上げる。
$\{a_m\}$ は $2,4,8$ で始まり，一般項が 2 次式で表される。すなわち，$a_m=2f_2(m)$ である。
$\{b_m\}$ は $1,2,4,8,16$ で始まり，一般項が 4 次式で表される。すなわち，$b_m=f_4(m)$ である。
第 3 節で，問 (1) を解くために参考になる数当てパズル百五減算の解法を研究する。
第 4 節で，百五減算の解法を関数に発展させて $f_3(x)$ についての問 (1) を解く。
第 5 節で，一般の $f_n(x)$ についての問 (1) を解く。
第 6 節で，階差数列を用いて解く別解を示す。
第 7 節で，階差数列を用いて問 (2) を解く。

2 具体例

2.1 m 個の円によって分割される領域

平面上に円を m 個描いて円弧によって区切られる領域ができるだけ多くなるようにする。領域の最大数を a_m とすると，$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8$ であることは容易にわかる。



問題 1 (数列 $\{a_m\}$)

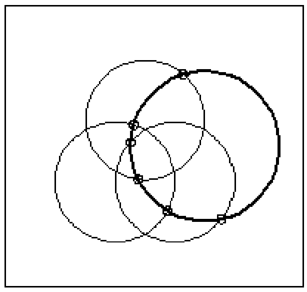
(1) a_{m+1} を a_m と m を用いて表せ。

(2) a_m を m を用いて表せ。

解答

(1) m 個の円で領域が a_m 個描かれているとき，$m+1$ 番目の円を領域がなるべく多く増えるように描きたい。2 つの円は高々2 点で交わることから，新しい円を古い円すべてと 2 点で交わるように描くと，領域が最も多く増える。このとき，新しい円の周上に交点が $2n$ 個でき，円周が $2n$ 個の円弧に区切られる。したがって，領域が $2n$ 個増える。

$$a_{m+1} = a_m + 2n \tag{2}$$



$m = 3$ の場合

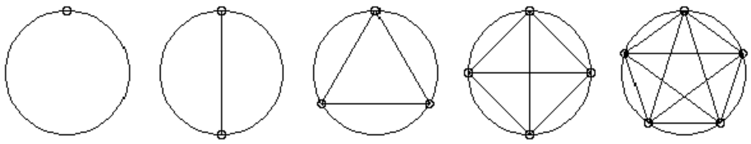
(2)

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{m-1} 2k \\ &= 2 + (m-1)m \\ &= m^2 - m + 2 \end{aligned} \tag{3}$$

a_m は 2^m ではなく m の 2 次式で表される。

2.2 円周上の m 個の点を結ぶ弦によって分割される領域

一つの円の周上に m 個の点を取って，それらを結んだ線分で区切られる領域ができるだけ多くなるようにする。領域の最大数を b_m とすると，$b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 4, b_4 = 8, b_5 = 16$ である。



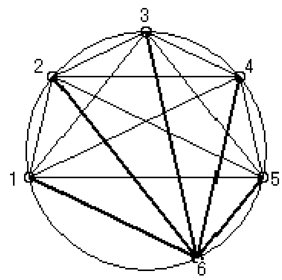
問題 2 (数列 $\{b_m\}$)

(1) b_{m+1} を b_m と m を用いて表せ。

(2) b_m を m を用いて表せ。

解答

(1) 領域を多くするためには，3 本以上の対角線が 1 点で交わらないようにすることである。このように新しく $m+1$ 番目の点をとると，それと k 番目の点を結ぶ弦が交わる弦は，$1, \ldots, k-1$ 番目の点と $k+1, \ldots, m$ 番目の点を結んだ弦である。すなわち，この新しい弦は古い弦との交点を $(k-1)(m-k)$ 個もつから，$(k-1)(m-k)+1$ 個の領域を分割する。したがって



$m = 5$ の場合

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= b_m + \sum_{k=1}^{m} ((k-1)(m-k)+1) \\ &= b_m + \sum_{k=1}^{m} (-k(k-1) + m(k-1) + 1) \\ &= b_m - \frac{1}{3}(m+1)m(m-1) + \frac{1}{2}m^2(m-1) + m \\ &= b_m + \frac{1}{6}(-2m-2+3m)m(m-1) + m \\ &= b_m + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2) + m \end{aligned} \tag{4}$$

(2)

$$\begin{aligned} b_m &= b_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{1}{6}k(k-1)(k-2) + k \right) \\ &= 1 + \frac{1}{24}(m+1)m(m-1)(m-2) + \frac{1}{2}(m+1)m \end{aligned} \tag{5}$$

b_m は 2^{m-1} ではなく m の 4 次式で表される。

3　百五減算

百五減算は次のような数当てパズルである。

(先生)	2 桁の数をひとつ考えてください。 3 つのヒントを手がかりにして，それを当てようと思います。
(生徒)	はい，考えました。
(先生)	3 で割った余りを教えてください。
(生徒)	2 です。
(先生)	5 で割った余りを教えてください。
(生徒)	3 です。
(先生)	7 で割った余りを教えてください。
(生徒)	4 です。
(先生)	えーと，…，53 ですね。
(生徒)	そうです。すごい。なんでわかるんですか。

3 つのキーナンバー K_3, K_5, K_7 を使うと簡単に当てることができる。

$$\begin{aligned} K_3 = &\quad (3\text{で割ると}1\text{余り}, 5\text{と}7\text{で割り切れる数}) &= 70 \\ K_5 = &\quad (5\text{で割ると}1\text{余り}, 3\text{と}7\text{で割り切れる数}) &= 21 \\ K_7 = &\quad (7\text{で割ると}1\text{余り}, 3\text{と}5\text{で割り切れる数}) &= 15 \end{aligned}$$

n を $3, 5, 7$ で割った余りをそれぞれ r_3, r_5, r_7 とすると

$$\begin{aligned} &K_3 \times r_3 \text{は}3\text{で割ると}r_3\text{余り}, 5\text{と}7\text{で割り切れる} \\ &K_5 \times r_5 \text{は}5\text{で割ると}r_5\text{余り}, 3\text{と}7\text{で割り切れる} \\ &K_7 \times r_7 \text{は}7\text{で割ると}r_7\text{余り}, 3\text{と}5\text{で割り切れる} \end{aligned}$$

ゆえに

$$N = K_3 \times r_3 + K_5 \times r_5 + K_7 \times r_7$$

は $3, 5, 7$ で割った余りがそれぞれ r_3, r_5, r_7 になる。しかし，N は 2 桁になるとは限らず，一般にもっと大きい数になる。

N から $3, 5, 7$ の最小公倍数 105 を引いても $3, 5, 7$ で割った数は変わらない。ゆえに，N から 105 を引けるだけ引いた数，すなわち 105 で割った余りが，目的の n になる。

上の例に適用すると次のようになる[1]。

$$\begin{aligned} N &= 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 4 = 263 \\ n &= 263 \bmod 105 = 53 \end{aligned}$$

注　K_3 は $70 - 105 = -35$ でもよい。この方が絶対値が小さいので計算が楽である。

[1] mod は $m \bmod n =$ (mをnで割った余り) を計算する演算子である。

問題 3 (千一減算)

1001 の約数 $7, 11, 13$ で割った余りを聞いて 3 桁の数を当てる同様のパズル千一減算が考えられる。このパズルのキーナンバー K_7, K_{11}, K_{13} を求めよ。なるべく絶対値が小さい数にしなさい。

解答

$$
\begin{array}{lclcrl}
K_7 & = & (\ 7\text{ で割ると }1\text{ 余り,}\quad 11,13\text{ で割り切れる数}) & = & -286 & (\text{または }715) \\
K_{11} & = & (11\text{ で割ると }1\text{ 余り,}\quad 7,13\text{ で割り切れる数}) & = & 364 & \\
K_{13} & = & (13\text{ で割ると }1\text{ 余り,}\quad 7,11\text{ で割り切れる数}) & = & -77 & (\text{または }924)
\end{array}
$$

4　$1, 2, 4, 8$ の次は

問題 4 (関数 $f_3(x)$)

$f_3(x)$ は 3 次式で，$f_3(1) = 1, f_3(2) = 2, f_3(3) = 4, f_3(4) = 8$ である。$f_3(5)$ の値を求めよ。

$f_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおいて，条件から係数 a, b, c, d を求めることができるが，この解法では，一般に $f_n(n+2)$ を求めることができない。百五減算の解法を関数に発展させて解くことを考える。

解答

剰余定理を用いて条件を書き換えると次のようになる。

$f_3(x)$ を $x-1$ で割った余りが 1 である
$f_3(x)$ を $x-2$ で割った余りが 2 である
$f_3(x)$ を $x-3$ で割った余りが 4 である
$f_3(x)$ を $x-4$ で割った余りが 8 である

次の性質を満たすキー関数 $K_1(x), K_2(x), K_3(x), K_4(x)$ を利用すればよいことがわかる。

$K_1(x)$ は $x-1$ で割ると 1 余り, $x-2, x-3, x-4$ で割り切れる
$K_2(x)$ は $x-2$ で割ると 1 余り, $x-1, x-3, x-4$ で割り切れる
$K_3(x)$ は $x-3$ で割ると 1 余り, $x-1, x-2, x-4$ で割り切れる
$K_4(x)$ は $x-4$ で割ると 1 余り, $x-1, x-2, x-3$ で割り切れる

たとえば，$K_2(x)$ は次のようにして求められる。

因数定理より，$K_2(x)$ は $x-1, x-3, x-4$ を因数にもつから

$$K_2(X) = A(x-1)(x-3)(x-4)$$

と表される。ふたたび，剰余定理より

$$1 = K_2(2) = A(2-1)(2-3)(2-4)$$

ゆえに

$$K_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}$$

同様にして

$$K_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}$$
$$K_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}$$
$$K_4(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

$f_3(x)$ は次のように表される。

$$f_3(x) = 1 \cdot K_1(x) + 2 \cdot K_2(x) + 4 \cdot K_3(x) + 8 \cdot K_4(x) \tag{6}$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
f_3(5) &= 1 \cdot K_1(5) + 2 \cdot K_2(5) + 4 \cdot K_3(5) + 8 \cdot K_4(5) \\
&= 1 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{(-1)(-2)(-3)} + 2 \cdot \frac{4 \cdot 2 \cdot 1}{1(-1)(-2)} + 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 1}{2 \cdot 1(-1)} + 8 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\
&= -1 + 8 - 24 + 32 \\
&= 15
\end{aligned}
$$

5　一般の場合

問題 5 (関数 $f_n(x)$)

$f_n(x)$ は n 次式で，$f_n(1) = 1, f_n(2) = 2, \dots, f_n(n) = 2^{n-1}, f_n(n+1) = 2^n$ である。$f_n(n+2)$ の値を求めよ。

解答

キー関数 $K_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ を定める。

$$\begin{aligned} K_i(x) &= \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-(i-1))}{(i-1)(i-2)\dots(i-(i-1))} \cdot \frac{(x-(i+1))\dots(x-n)\,(x-(n+1))}{(i-(i+1))\dots(i-n)\,(i-(n+1))} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)\dots(x-(i-1))}{(i-1)!} \cdot \frac{(x-(i+1))\dots(x-n)\,(x-(n+1))}{(-1)^{n-i+1}(n-i+1)!} \end{aligned}$$

式を簡単にするために

$${}_x\mathcal{C}_i = \frac{x(x-1)\dots(x-i+1)}{i!}$$

と定義する。x が i 以上の整数 m のときは，組合せの数と一致する。

$${}_m\mathcal{C}_i = {}_m\mathrm{C}_i$$

この記号を用いて表すと

$$K_i(x) = (-1)^{n-i+1}\,{}_{x-1}\mathcal{C}_{i-1} \cdot {}_{x-i-1}\mathcal{C}_{n-i+1}$$

となる。

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 \cdot K_1(x) + 2 \cdot K_2(x) + \cdots + 2^{n-1} \cdot K_n(x) + 2^n \cdot K_{n+1}(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} \cdot K_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} {}_{x-1}\mathcal{C}_{i-1} \cdot {}_{x-i-1}\mathcal{C}_{n-i+1} (-1)^{n-i+1} \cdot 2^{i-1} \end{aligned}$$

$k = i - 1$ で書き換えると

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_{x-1}\mathcal{C}_k \cdot {}_{x-2-k}\mathcal{C}_{n-k} (-1)^{n-k} \cdot 2^k \tag{7}$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
f_n(n+2) &= \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}\mathcal{C}_k \cdot {}_{n-k}\mathcal{C}_{n-k}(-1)^{n-k} \cdot 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_k (-1)^{n-k} \cdot 2^k \\
&= -\sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_k (-1)^{n+1-k} \cdot 2^k \\
&= -\left(\sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k (-1)^{n+1-k} \cdot 2^k - {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1} \cdot 2^{n+1} \right) \\
&= -\Big(((-1)+2)^{n+1} - 2^{n+1} \Big) \qquad \text{(二項定理を用いた)} \\
&= 2^{n+1} - 1
\end{aligned}
$$

これが問 (2) の答えである。

6　階差数列を用いて解く

$g(x) = f_n(x+1) - f_n(x)$ は $n-1$ 次式で，$m = 1, 2, \ldots, n$ について

$$g(m) = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}$$

であるから，$g(x)$ は $f_{n-1}(x)$ に他ならない。すなわち，数列 $\{f_{n-1}(m)\}$ は $\{f_n(m)\}$ の階差数列である。$f_0(m) = 1$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ で $f_n(1) = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ だから，m, n が小さい数から順に次の式を適用していけば，すべての $f_n(m)$ を計算することができる。

$$f_n(m+1) = f_{n-1}(m) + f_n(m)$$

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
$f_0(m)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\ldots$
$f_1(m)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\ldots$
$f_2(m)$	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	$\ldots$
$f_3(m)$	1	2	4	8	15	26	42	64	93	130	$\ldots$
$f_4(m)$	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256	$\ldots$

この表を見ると，

$$f_n(n+2) = 2^{n+1} - 1 \tag{8}$$

らしいことがわかる。

問題 6 (問 (1) の別解)

(8) が正しいことを，数学的帰納法によって証明せよ。

解答

(i) $n = 0$ のとき

$$f_0(2) = 1 = 2^1 - 1 \cdots \text{正しい}$$

(ii) $n = k$ のとき正しいとすると

$$\begin{aligned} f_{k+1}(k+3) &= f_k(k+2) + f_{k+1}(k+2) \\ &= \left(2^{k+1} - 1\right) + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+2} - 1 \end{aligned}$$

ゆえに，$n = k+1$ のとき正しい

7　問 (2) の解答

上の表から，$m > n+1$ で初めて $f_n(m)$ が 2 の累乗になるのは

$$f_n(2n+2) = 2^{2n} \tag{9}$$

らしいことがわかる。

問題 7 問 (2) の解

キー関数を用いて導いた式 (7) が (9) を満たすことを示せ。

解答

$$\begin{aligned}
f_n(2n+2) &= \sum_{k=0}^{n} {}_{2n+1}\mathrm{C}_k \cdot {}_{2n-k}\mathrm{C}_{n-k}\ (-1)^{n-k} \cdot 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \cdot \frac{(2n-k)!}{(n-k)!n!}\ (-1)^{n-k} \cdot 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)!}{(2n+1-k)k!(n-k)!n!}\ (-1)^{n-k} \cdot 2^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{n-k} \cdot 2^k \cdot \frac{1}{2n-k+1} \\
&= (2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(-1)^{n-k} \cdot 2^{2k-2n-1} \cdot \frac{2^{2n-k+1}}{2n-k+1} \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 2^{2k}(-1)^{n-k} \cdot \frac{2^{2n-k+1}}{2n-k+1} \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k 4^k(-1)^{n-k} \int_0^2 x^{2n-k}\ dx \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \int_0^2 {}_n\mathrm{C}_k 4^k(-1)^{n-k} x^{2n-2k} x^k\ dx \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}} \int_0^2 \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k (4x)^k(-x^2)^{n-k}\ dx \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}} \int_0^2 \left(4x-x^2\right)^n\ dx \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+1}} \int_0^2 x^n(4-x)^n\ dx
\end{aligned}$$

$y=(4-x)^n x^n$ は $x=2$ に関して対称なので

$$f_n(n+2) = \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+2}} \int_0^4 x^n(4-x)^n\ dx$$

一般に，

$$S_{m,n}(\alpha,\beta) = \int_\alpha^\beta (\beta-x)^m\ (x-\alpha)^n\ dx$$

は，部分積分法を繰り返し適用して値を求めることができる。

$$
\begin{aligned}
S_{m,n}(\alpha,\beta) &= \int_\alpha^\beta (\beta-x)^m \left(\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}\right)' dx \\
&= \left[(\beta-x)^m \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}\right]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta -m(\beta-x)^{m-1}\cdot\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{n+1}\,dx \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot S_{m-1,n+1}(\alpha,\beta)
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
\begin{aligned}
S_{m,n}(\alpha,\beta) &= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdot S_{m-2,n+2}(\alpha,\beta) \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{m+n}\cdot S_{0,m+n}(\alpha,\beta) \\
&= \frac{m}{n+1}\cdot\frac{m-1}{n+2}\cdots\frac{1}{m+n}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx \\
&= \frac{m!\;n!}{(m+n)!}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1} \\
&= \frac{1}{{}_{m+n}\mathrm{C}_m}\cdot\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
f_n(2n+2) &= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+2}}\cdot S_{n,n}(0,4) \\
&= \frac{(2n+1)\ {}_{2n}\mathrm{C}_n}{2^{2n+2}}\cdot\frac{1}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}\cdot\frac{4^{2n+1}}{(2n+1)} \\
&= 2^{2n}
\end{aligned}
$$