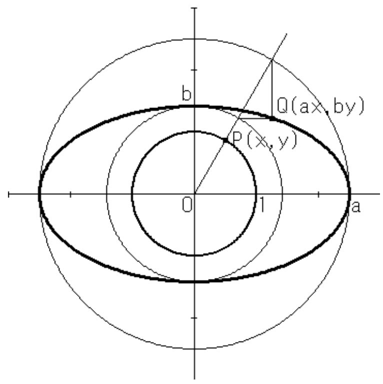
1　楕円と双曲線の媒介変数表示

楕円 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と双曲線 H：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示をいくつか紹介します。

1.1　楕円と基本円の関係



点 $\mathrm{P}(x,y)$ を基本円 E_0：$x^2+y^2=1$ 上を動かすと，対応する点 $\mathrm{Q}(ax,by)$ が楕円 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を描きます。
したがって，基本円 E_0 の媒介変数表示

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

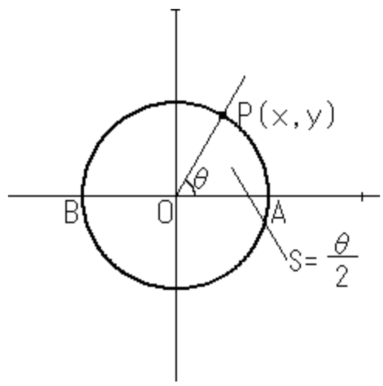
が得られると，

$$\begin{cases} x=af(t) \\ y=bg(t) \end{cases}$$

が，楕円 E の媒介変数表示になります。

注 1.1　媒介変数 t の図形的意味（たとえば，線分 OP の傾き）が，基本円 E_0 上の点 P についての意味であって，楕円 E 上の点 Q についてではないので注意しないといけません。

1.2　基本円の媒介変数表示 (1)



三角関数の定義が，そのまま基本円の媒介変数表示です。

$$E_0:\ \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqq \theta < 2\pi) \tag{1}$$

媒介変数の図形的意味は，

$$\theta=\angle\mathrm{AOP}$$

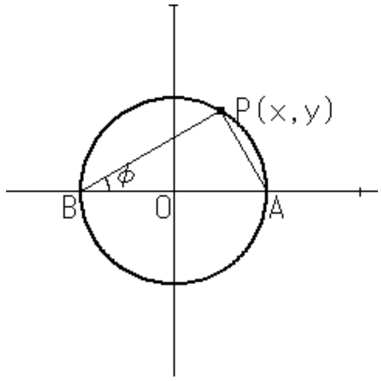
です。また，扇形 OAP の面積 S の 2 倍

$$\theta=2S$$

ということもできます。

1.3　基本円の媒介変数表示 (2)

$\phi = \angle\mathrm{ABP}$ を媒介変数とする場合。



$$\mathrm{BP} = \mathrm{BA}\cos\phi = 2\cos\phi$$

より

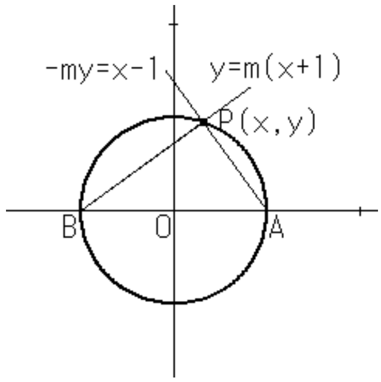
$$E_0:\ \begin{cases} x = 2\cos^2\phi - 1 \\ y = 2\cos\phi\sin\phi \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \phi \leqq \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

注 1.2　$\angle\mathrm{AOP} = 2\angle\mathrm{ABP}$ だから，式 (1) と式 (2) を比べると，倍角公式が確かめられます。

$$\cos 2\phi = 2\cos^2\phi - 1\ ,\ \sin 2\phi = 2\cos\phi\sin\phi$$

1.4　基本円の媒介変数表示 (3)

BP の傾き m を媒介変数とする場合。



$$\mathrm{BP}:\ y = m(x+1)$$

$\mathrm{P}(x, y)$ について，

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = -(x^2 - 1) = -(x+1)(x-1)$$
$$\mathrm{AP}\text{ の傾き} = \frac{y}{x-1} = -\frac{x+1}{y} = -\frac{1}{m}$$

よって

$$\mathrm{AP}:\ -my = x - 1$$
$$\mathrm{BP}:\ y = mx + m$$

ゆえに

$$E_0:\ \begin{cases} x = \dfrac{1-m^2}{1+m^2} \\ y = \dfrac{2m}{1+m^2} \end{cases} \qquad (-\infty < m < \infty) \qquad (3)$$

注 1.3　式 (3) は，基本円 E_0 全体ではなく，点 B を除いた部分を表しています。

注 1.4　$m = \tan\phi = \tan\dfrac{\theta}{2}$ だから，式 (1) と式 (3) を比べると，次の公式が確かめられます。

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\ ,\ \sin\theta = \frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\ ,\ \left(\text{ゆえに }\ \tan\theta = \frac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}\right)$$

1.5　双曲線と基本双曲線の関係

双曲線の場合も，基本双曲線 H_0： $x^2-y^2=1$ の媒介変数表示

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

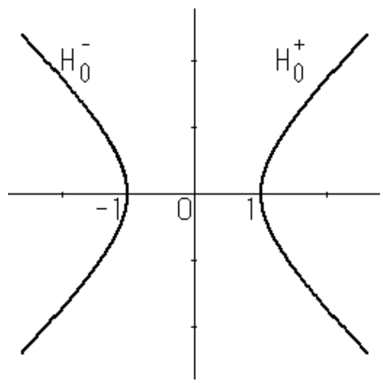
が得られると，

$$\begin{cases} x=af(t) \\ y=bg(t) \end{cases}$$

が，双曲線 H： $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の媒介変数表示になります。
また，

$$\begin{cases} x=ag(t) \\ y=bf(t) \end{cases}$$

が，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ の媒介変数表示になります。
さらに，基本双曲線 H_0 は連続した曲線２本 H_0^+ と H_0^- からできていて，H_0^+ は $x \geqq 1$ の範囲にあり，H_0^- はそれと原点に関して対称です。ですから，H_0^+ の媒介変数表示



$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$$

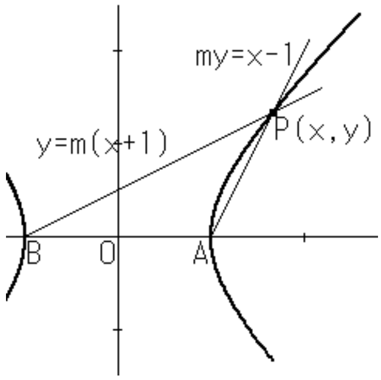
がわかれば，

$$\begin{cases} x=-f(t) \\ y=-g(t) \end{cases}$$

が，H_0^- の媒介変数表示になります。

1.6　基本双曲線の媒介変数表示 (1)

BP の傾き m を媒介変数とする場合。



$$\mathrm{BP}: \ y = m(x+1)$$

P(x, y) について，

$$x^2 - y^2 = 1$$
$$y^2 = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$
$$\text{AP の傾き} = \frac{y}{x-1} = \frac{x+1}{y} = \frac{1}{m}$$

よって

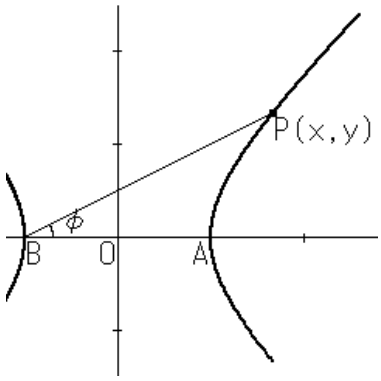
$$\mathrm{AP}: \ my = x - 1$$
$$\mathrm{BP}: \ y = mx + m$$

ゆえに

$$H_0^+: \begin{cases} x = \dfrac{1+m^2}{1-m^2} \\ y = \dfrac{2m}{1-m^2} \end{cases} \qquad (-1 < m < 1) \tag{4}$$

1.7　基本双曲線の媒介変数表示 (2)

$\phi = \angle \mathrm{ABP}$ を媒介変数とする場合。
式 (4) において，$m = \tan\phi$ だから



$$H_0^+: \begin{cases} x = \dfrac{1+\tan^2\phi}{1-\tan^2\phi} \\ y = \dfrac{2\tan\phi}{1-\tan^2\phi} \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{4} < \phi < \frac{\pi}{4}\right) \tag{5}$$

$\theta = 2\angle \mathrm{ABP}$ を媒介変数とする場合。
式 (5) において，$\phi = \dfrac{\theta}{2}$ だから，注 1.4 の公式を用いると，

$$H_0^+: \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\theta} \\ y = \tan\theta \end{cases} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \tag{6}$$

注 1.5　円のときと違って，$\theta = \angle \mathrm{AOP}$ ではありません。

1.8　基本双曲線の媒介変数表示 (3)

式 (3) と (4) は，

$$(1+m^2)^2 = (1-m^2)^2 + (2m)^2$$

から考え始めて

$$\left(\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2 + \left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2 = 1$$
$$\left(\frac{1+m^2}{1-m^2}\right)^2 - \left(\frac{2m}{1-m^2}\right)^2 = 1$$

を利用したとも考えられます。

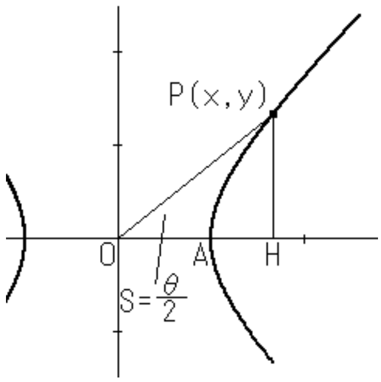
$$\left(\frac{1+m^2}{2m}\right)^2 - \left(\frac{1-m^2}{2m}\right)^2 = 1$$

を利用して，次の媒介変数表示が考えられます。

$$H_0^+ : \begin{cases} x = \dfrac{t^2+1}{2t} = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{t^2-1}{2t} = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases} \qquad (0 < t < \infty) \tag{7}$$

媒介変数 t の図形的意味は何でしょうか。

基本双曲線 H_0 と x 軸と線分 AP で囲まれた図形 OAP の面積 S を t で表してみましょう。



$$
\begin{aligned}
\triangle \mathrm{OHP} &= \frac{1}{2}xy \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right) \\
\text{図形 AHP} &= \int_1^x y\,dx \\
&= \int_1^t y\,\frac{dx}{dt}dt \\
&= \int_1^t \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\int_1^t\left(t-\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}-2\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^t \\
&= \frac{1}{8}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)-\frac{1}{2}\log t \\
\therefore\ S &= \triangle \mathrm{OHP} - \text{図形 AHP} \\
&= \frac{1}{2}\log t
\end{aligned}
$$

これが，t の図形的意味です。

$\theta = \log t$ と置き換えると次の媒介変数表示が得られます。

$$
H_0^+ : \left\{
\begin{aligned}
x &= \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\
y &= \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2}
\end{aligned}
\right.
\qquad (-\infty < \theta < \infty) \tag{8}
$$

媒介変数の図形的意味は

$$\theta = 2S$$

です。

注 1.6　次のように定義した関数を，双曲線関数といいます。

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \quad \text{（ハイパボリックコサイン）}$$

$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \quad \text{（ハイパボリックサイン）}$$

$$\tanh\theta = \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} \quad \text{（ハイパボリックタンジェント）}$$