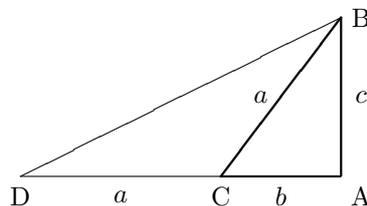


# 1 ピタゴラス三角形

3 辺の長さ  $a, b, c$  が整数値であるような直角三角形をピタゴラス三角形という。  
ピタゴラスの定理 (三平方の定理) より

$$a^2 = b^2 + c^2$$

である。



$\frac{c}{a+b}$  を既約分数で表したものを  $\frac{n}{m}$  とおいて,  $\frac{c}{b}$  を  $m, n$  で表すと次のようになる。

$$\frac{c}{a+b} = \frac{n}{m}$$

$$na + nb = mc$$

$$na = mc - nb$$

$$n^2 a^2 = m^2 c^2 - 2mnbc + n^2 b^2$$

$$n^2 (a^2 - b^2) = m^2 c^2 - 2mnbc$$

$$n^2 c^2 = m^2 c^2 - 2mnbc$$

$$-(m^2 - n^2)c^2 = -2mnbc$$

$$\frac{c}{b} = \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

[ 別解 ]

$$\frac{c}{b} = \tan C$$

$$= \tan 2D$$

$$= \frac{2 \tan D}{1 - \tan^2 D}$$

$$= \frac{2 \frac{n}{m}}{1 - \frac{n^2}{m^2}}$$

$$= \frac{2mn}{m^2 - n^2}$$

また,  $\frac{a}{c}$  は次のようになる。

$$\frac{a}{c} = \frac{a+b}{c} - \frac{b}{c} = \frac{m}{n} - \frac{m^2 - n^2}{2mn} = \frac{m^2 + n^2}{2mn}$$

ゆえに

$$a : b : c = m^2 + n^2 : m^2 - n^2 : 2mn$$

**定理 1.1** ピタゴラス三角形を表す式

3 辺が互いに素なすべてのピタゴラス三角形が次の式で表される。

(1)  $c$  が偶数のもの

$$a = m^2 + n^2, \quad b = m^2 - n^2, \quad c = 2mn$$

ただし,  $m > n$ ,  $m$  と  $n$  は互いに素,  $m$  と  $n$  の一方は偶数

(2)  $b$  が偶数のもの

$$a = \frac{m^2 + n^2}{2}, \quad b = \frac{m^2 - n^2}{2}, \quad c = mn$$

ただし,  $m > n$ ,  $m$  と  $n$  は互いに素な奇数

例 1.1  $m = 10$  まで

$m$	$n$	$a$	$b$	$c$	$m$	$n$	$a$	$b$	$c$
2	1	5	3	4					
3	2	13	5	12	3	1	5	4	3
4	1	17	15	8					
4	3	25	7	24					
5	2	29	21	20	5	1	13	12	5
5	4	41	9	40	5	3	17	8	15
6	1	37	35	12					
6	5	61	11	60					
7	2	53	45	28	7	1	25	24	7
7	4	65	33	56	7	3	29	20	21
7	6	85	13	84	7	5	37	12	35
8	1	65	63	16					
8	3	73	55	48					
8	5	89	39	80					
8	7	113	15	112					
9	2	85	77	36	9	1	41	40	9
9	4	97	65	72	9	5	53	28	45
9	8	145	17	144	9	7	65	16	63
10	1	101	99	20					
10	3	109	91	60					
10	7	149	51	140					
10	9	181	19	180					

例 1.2 ピタゴラス三角形

3 辺が互いに素で、斜辺が 200 以下のピタゴラス三角形は次の 32 個ある。

$a$	$b$	$c$	$\angle B$	$\angle C$	$a$	$b$	$c$	$\angle B$	$\angle C$
5	4	3	53.13°	36.86°	101	99	20	78.57°	11.42°
13	12	5	67.38°	22.61°	109	91	60	56.60°	33.39°
17	15	8	61.92°	28.07°	113	112	15	82.37°	7.62°
25	24	7	73.73°	16.26°	125	117	44	69.39°	20.60°
29	21	20	46.39°	43.60°	137	105	88	50.03°	39.96°
37	35	12	71.07°	18.92°	145	144	17	83.26°	6.73°
41	40	9	77.31°	12.68°	145	143	24	80.47°	9.52°
53	45	28	58.10°	31.89°	149	140	51	69.98°	20.01°
61	60	11	79.61°	10.38°	157	132	85	57.22°	32.77°
65	63	16	75.75°	14.25°	169	120	119	45.23°	44.76°
65	56	33	59.48°	30.51°	173	165	52	72.50°	17.49°
73	55	48	48.88°	41.11°	181	180	19	83.97°	6.02°
85	84	13	81.20°	8.79°	185	176	57	72.05°	17.94°
85	77	36	64.94°	25.05°	185	153	104	55.79°	34.20°
89	80	39	64.01°	25.98°	193	168	95	60.51°	29.48°
97	72	65	47.92°	42.07°	197	195	28	81.82°	8.17°

注 1.1 上の表の中で半正方形（直角二等辺三角形）に近いもの，すなわち  $\angle B$  が  $45^\circ$  に近いものは，

$$a = 169, \quad b = 120, \quad c = 119$$

である。これから， $\sqrt{2}$  の近似値を計算できる。

$$\frac{a}{b} = \frac{169}{120} = 1.40833$$

$$\frac{a}{c} = \frac{169}{119} = 1.42016$$

$$\text{平均} = 1.41425$$

注 1.2 上の表の中で半正三角形に近いもの，すなわち  $\angle B$  が  $60^\circ$  に近いものは，

$$a_1 = 65, \quad b_1 = 56, \quad c_1 = 33$$

$$a_2 = 193, \quad b_2 = 168, \quad c_2 = 95$$

である。これから， $\sqrt{3}$  の近似値を計算できる。

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{56}{33} = 1.69696$$

$$\frac{b_2}{c_2} = \frac{168}{95} = 1.76842$$

$$\text{平均} = 1.73269$$