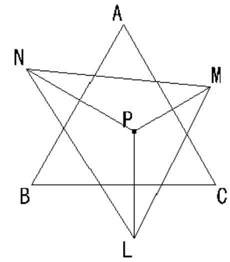
1　回答（2023/08/06）

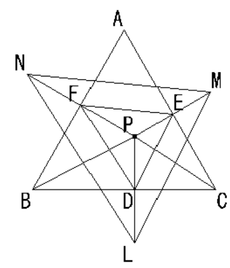
問題 1.1

平面上に一辺の長さが 2 の正三角形 ABC と, その内部（周上を除く）に点 P がある。
辺 BC,CA,AB に関して, 点 P と対称な点をそれぞれ L, M, N とするとき, 三角形 LMN が鋭角三角形となるような点 P の存在範囲を図示し, その面積を求めよ。



解答 1.1

(1) PL, PM, PN とそれぞれ BC, CA, AB との交点を D, E, F とすると，三角形 DEF は三角形 LMN と相似であるから，三角形 DEF が鋭角三角形になる条件を考える.

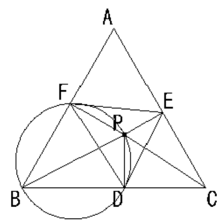


(2) $\angle\mathrm{FDE} = 90^\circ$ になる条件を調べる.
$\angle\mathrm{PFB} = \angle\mathrm{PDB} = 90^\circ$ だから，四角形 PFBD は円に内接している.

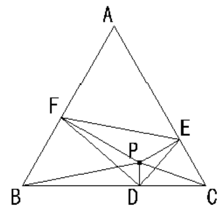
$$\angle\mathrm{FDP} = \angle\mathrm{FBP} = 60^\circ - \angle\mathrm{PBD}$$

同様に

$$\begin{aligned} & \angle\mathrm{EDP} = \angle\mathrm{ECP} = 60^\circ - \angle\mathrm{PCD} \\ \therefore\ & \angle\mathrm{FDE} = \angle\mathrm{FDP} + \angle\mathrm{EDP} = 120^\circ - (\angle\mathrm{PBD} + \angle\mathrm{PCD}) \\ & \qquad = 120^\circ - (180^\circ - \angle\mathrm{BPC}) = \angle\mathrm{BPC} - 60^\circ \end{aligned}$$



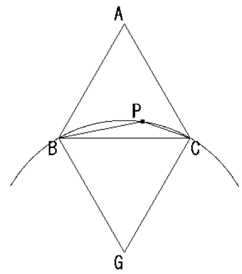
(3) ゆえに，$\angle\mathrm{BPC} = 150^\circ$ のとき $\angle\mathrm{FDE} = 90^\circ$ となる.



(4) $\angle \mathrm{BPC} = 150^\circ$ を満たす P はある円の弧を描く．
その円の中心を G とすると，円周角と中心角の定理より

$$\angle \mathrm{BPC} = 2(180^\circ - \angle \mathrm{BPC}) = 60^\circ$$

すなわち，三角形 BGC は正三角形である．



(5) $\angle \mathrm{PCA}, \angle \mathrm{PAB}$ についても同様なことが成り立つから，三角形 DEF が鋭角三角形になるような点 P の範囲はは，右図の斜線部分である（境界は含まない）．
その面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle \mathrm{GHI} - \text{扇形 GBC} \times 3 \\ &= 4\sqrt{3} - 2\pi \end{aligned}$$