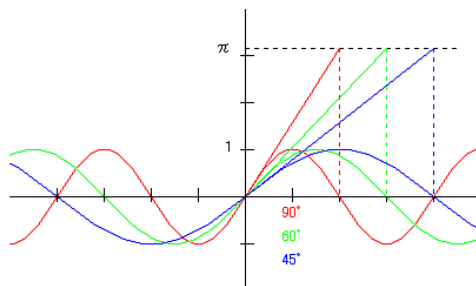


## ラジアンって何？

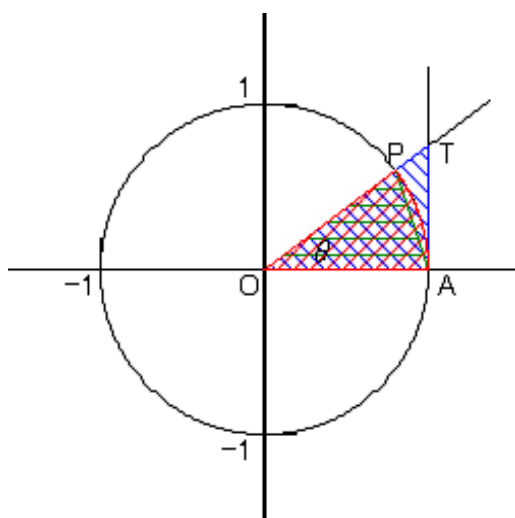
$y = \sin \theta$  のグラフをかくとき、横軸 ( $\theta$  軸) の 1 単位を何度にするといいでしょうか。  
 1 単位を  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  とした場合のグラフを、それぞれ赤, 緑, 青の線で描いてみましょう。



単位を変えることによって、曲線の傾斜 (接線の傾き) の変化が急になったり緩やかになります。接線の傾きは微分係数ですから、微分係数の定義にしたがって微分してみましょう。

$$\begin{aligned}
 (\sin \theta)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta + h) - \sin \theta}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \theta \cos h + \cos \theta \sin h - \sin \theta}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin h}{h} \cos \theta - \frac{1 - \cos h}{h} \sin \theta \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\sin h}{h} \cos \theta - \frac{\sin^2 h}{h(1 + \cos h)} \sin \theta \right) \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \left( \cos \theta - \frac{\sin h}{1 + \cos h} \sin \theta \right) \\
 &= m \cos \theta \qquad \left( m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \text{ とおいた} \right)
 \end{aligned}$$

$m$  は  $y = \sin \theta$  上の  $\theta = 0$  の点 (原点) における接線の傾きで、横軸の 1 単位を何度にするかで変わります。 $m = 1$  だと  $(\sin \theta)' = \cos \theta$  となり好都合ですが、それには 1 単位を何度にしたらいいでしょうか。



三角形 OAP と扇形 OAP と三角形 OAT の面積を比べることにより、次の大小関係がわかります。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sin \theta &\leq \frac{\theta}{360^\circ} \pi \leq \frac{1}{2} \tan \theta \\ \frac{1}{\sin \theta} &\geq \frac{180^\circ}{\theta \pi} \geq \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \frac{\pi}{180^\circ} &\geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \frac{\pi}{180^\circ} \cos \theta\end{aligned}$$

ゆえに

$$m = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\pi}{180^\circ}$$

となります。たしかに、上の3つのグラフではそのように見えます。

したがって、

$$m = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

とするには、1 単位を

$$\frac{180^\circ}{\pi} = 57.30\dots^\circ$$

とすればいいことがわかります。この単位をラジアンといいます。

$$\begin{aligned}\theta(\text{ラジアン}) = \alpha^\circ &\iff \alpha = \frac{\theta}{\pi} \times 180 \\ &\iff \theta = \frac{\alpha}{180} \pi\end{aligned}$$

という関係が成り立ちます。