

質問 $977x - 757y = 1$ の整数解を、連分数を用いて求めてください。

回答

- (1) $\frac{977}{757}$ を連分数にすると、つぎのような計算をします。(互除法と同じ計算ですね。)

$$\begin{aligned} \frac{977}{757} &= 1 + \frac{220}{757} \\ \frac{757}{220} &= 3 + \frac{97}{220} \\ \frac{220}{97} &= 2 + \frac{26}{97} \\ \frac{97}{26} &= 3 + \frac{19}{26} \\ \frac{26}{19} &= 1 + \frac{7}{19} \\ \frac{19}{7} &= 2 + \frac{5}{7} \\ \frac{7}{5} &= 1 + \frac{2}{5} \\ \frac{5}{2} &= 2 + \frac{1}{2} \\ \frac{2}{1} &= 2 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\frac{977}{757} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}}}}}}$$

- (2) 最後の、 $+\frac{1}{2}$ を除いてできる連分数を考えます。

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}} \\ &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}} \\ &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}} \\ &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1}}}} \\ &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} \\ &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \\ &1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

(3) 下から順に計算します.

$$\begin{aligned}2 &= \frac{2}{1} \\ \frac{1}{2} + 1 &= \frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} + 2 &= \frac{8}{3} \\ \frac{3}{8} + 1 &= \frac{11}{8} \\ \frac{8}{11} + 3 &= \frac{41}{11} \\ \frac{11}{41} + 2 &= \frac{93}{41} \\ \frac{41}{93} + 3 &= \frac{320}{93} \\ \frac{93}{320} + 1 &= \frac{413}{320}\end{aligned}$$

(4) (1) と (3) の対応する分数を並べて書いて眺めましょう. 何かに気がつきませんか.

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} &: \frac{2}{1} \\ \frac{7}{5} &: \frac{3}{2} \\ \frac{19}{7} &: \frac{8}{3} \\ \frac{26}{19} &: \frac{11}{8} \\ \frac{97}{26} &: \frac{41}{11} \\ \frac{220}{97} &: \frac{93}{41} \\ \frac{757}{220} &: \frac{320}{93} \\ \frac{977}{757} &: \frac{413}{320}\end{aligned}$$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ を見ると, $ad - bc = \pm 1$ になっています.

(5) (4) で見たように,

$$977 \times 320 - 757 \times 413 = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

右辺を 1 にするには

$$977 \times 757 - 757 \times 977 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

から辺々引いて

$$977 \times 437 - 757 \times 564 = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

おまけ

$977x - 757y = 19$ を満たす最小の自然数のペア x, y を求めなさい.

解答

式③を19倍する

$$977 \times (437 \times 19) - 757 \times (564 \times 19) = 19$$

$$977 \times 8303 - 757 \times 10716 = 19$$

②を引けるだけ引く

$$977 \times (8303 - 757 \times 10) - 757 \times (10716 - 977 \times 10) = 19$$

$$977 \times 733 - 757 \times 946 = 19 \quad \dots [\text{答}]$$

別解 実は、19 は特殊の数で、(1) で連分数に展開したとき、途中で分子に現れています.

$$\begin{aligned} \frac{977}{757} &= 1 + \frac{220}{757} \\ \frac{757}{220} &= 3 + \frac{97}{220} \\ \frac{220}{97} &= 2 + \frac{26}{97} \\ \frac{97}{26} &= 3 + \frac{19}{26} \end{aligned}$$

ここで打ち切って、それまでの連分数を考えます.

$$1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$$

下から順に計算します.

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{3}{1} \\ \frac{1}{3} + 2 &= \frac{7}{3} \\ \frac{3}{7} + 3 &= \frac{24}{7} \\ \frac{7}{24} + 1 &= \frac{31}{24} \end{aligned}$$

ゆえに

$$977 \times 24 - 757 \times 31 = -19 \quad \dots \textcircled{4}$$

② - ④ より

$$977 \times 733 - 757 \times 946 = 19 \quad \dots [\text{答}]$$

$mx - ny = r$ の解法

r が m, n の最大公約数 d の倍数でないとき, 解はありません.

r が最大公約数 d の倍数のとき,

- (1) $\frac{m}{n}$ を連分数に展開していきます.
- (2) いくつか分子に r の約数 r' が現れるので, そこで打ち切ります.
- (3) その前までの連分数を計算します.
- (4) その結果を $\frac{y'}{x'}$ とすると, $mx' - ny' = \pm r'$ になります.
- (5) $\frac{r}{\pm r'}$ 倍すると, $mx - ny = r$ になります.
- (6) $m \times n - n \times m = 0$ を引けるだけ引くと, 最小の自然数のペア x, y にすることができます.