立方体の塗り方

立方体の6面に色を塗って塗り分ける。使用可能な色が n 色あって，実際に使用する色が k 色の場合の塗り方の総数 $f(n,k)$ と，実際に使用する色が k 色以下の場合の塗り方の総数 $F(n,k)$ を調べる。立方体を（水平に，あるいは垂直に）回転することによって同じになる塗り方は同一視し，まとめて1通りと数える。鏡像が同じになっても同一視しない。ただし，$1 \leqq k \leqq \min(n,6)$ である。

(1) 6色使用する場合

(1.1) 回転による同一視を考えないとき

$6! = 720$　　通り

このうちのひとつの塗り方に対し，回転を考えると

どの面を下にするか：　6　通り
どの面を前にするか：　4　通り
ゆえに，$6 \times 4 = 24$　通りの塗り方が同一視される

したがって，

$$f(6,6) = \frac{720}{24} = 30 \quad (\text{通り})$$

(1.2) (別解) 同じものができないように塗っていく

下の面は①としてかまわない	:	1　通り
上の面の選び方	:	5　通り
前の面は残りの色の最小の色としてかまわない	:	1　通り
残りの3面の塗り方	:	$3! = 6$　通り
ゆえに		$f(6,6) = 5 \times 6 = 30$　(通り)

(1.3) n 色のうちの6色を使用する塗り方

$$f(n,6) = 30 \times {}_n\mathrm{C}_6 \quad (\text{通り})$$

(2) 5色使用する場合

(2.1) ①①②③④⑤ を使う塗り方

(2.1.1) 6色（①〜⑥）使ってできた立方体の⑥を①で塗り変えた30個を考えると，2個ずつ同じものができるから，

$$\frac{30}{2} = 15 \quad \text{通り}$$

(2.1.2) (別解) 同じものができないように塗っていく

(i) ①と①を下と上に塗る場合，残りの4面はいわゆる数珠順列であるから

$$\frac{(4-1)!}{2} = 3 \quad \text{通り}$$

(ii) ①と②を下と前に塗る場合，上を後より小さい色としてかまわないから

上と後の色の選び方 ： ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通り
左と右の色の選び方 ： $2! = 2$ 通り
ゆえに $6 \times 2 = 12$ 通り

(iii) 合計

$3 + 12 = 15$ 通り

(2.2) ①②③④⑤ⓧ ($x = 1$〜5) を使う塗り方

$$f(5,5) = 15 \times 5 = 75 \quad (\text{通り})$$

(2.3) n 色のうちの 5 色を使用する塗り方

$$f(n,5) = 75 \times {}_n\mathrm{C}_5 \quad (\text{通り})$$

(3) 4色使用する場合

(3.1) ①①①②③④を使う塗り方

(3.1.1) ①と②，①と③，①と④ が対面になるように塗る場合

３つの①を下後左に②を上にしてかまわない
③④を前右とするか右前とするか
ゆえに，2 通り

(3.1.2) ２つの①を対面になるように塗る場合

もう１つの①の対面に塗る色の選び方 ： 3 通り
鏡像が自分自身と同じになるから，残りの塗り方 ： 1 通り
ゆえに $3 \times 1 = 3$ 通り

(3.1.3) 合計

$2 + 3 = 5$ 通り

(3.2) ①①②②③④を使う塗り方

(3.2.1) ①と①，②と②，③と④が対面になるように塗る場合

鏡像が自分自身と同じになるから ： 1 通り

(3.2.2) ①と①，②と③，②と④が対面になるように塗る場合

鏡像が自分自身と同じになるから ： 1 通り

(3.2.3) ①と③，②と②，①と④が対面になるように塗る場合

鏡像が自分自身と同じになるから ： 1 通り

(3.2.4) ①と②，①と②，③と④が対面になるように塗る場合

鏡像が自分自身と同じになるから　：　1　通り

(3.2.5) ①と②，①と③，②と④が対面になるように塗る場合

鏡像が自分自身と異なるから　：　2　通り

(3.2.6) ①と②，①と④，②と③が対面になるように塗る場合

鏡像が自分自身と異なるから　：　2　通り

(3.2.7) 合計

$$1+1+1+1+2+2=8 \quad \text{通り}$$

(3.3) ①②③④の４色を使用するもの

(3.3.1) a,a,a,b,c,d タイプ：　${}_4\mathrm{C}_1 \times 5 = 20$　通り

(3.3.2) a,a,b,b,c,d タイプ：　${}_4\mathrm{C}_2 \times 8 = 48$　通り

(3.3.3) 計：　$f(4,4) = 20+48 = 68$　(通り)

(3.4) n 色のうちの 4 色を使用する塗り方

$$f(n,4) = 68 \times {}_n\mathrm{C}_4 \quad (\text{通り})$$

(4) ３色使用する場合

(4.1) ①①①①②③を使う塗り方

(4.1.1) ①と①，①と①，②と③ が対面になるような塗り方：　1 通り

(4.1.2) ①と①，①と②，①と③ が対面になるような塗り方：　1 通り

(4.1.3) 計：　$1+1=2$　通り

(4.2) ①①①②②③を使う塗り方

(4.2.1) ①と①，①と②，②と③ が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.2.2) ①と①，①と③，②と② が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.2.3) ①と②，①と②，①と③ が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.2.4) 計：　$1+1+1=3$　通り

(4.3) ①①②②③③を使う塗り方

(4.3.1) ①と①，②と②，③と③ が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.3.2) ①と①，②と③，②と③ が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.3.3) ②と②，①と③，①と③ が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.3.4) ③と③，①と②，①と② が対面になるような塗り方：　1　通り

(4.3.5) ①と②，②と③，③と① が対面になるような塗り方：　2　通り

(4.3.6) 計：　$1+1+1+1+2=6$　通り

(4.4) 合計

$$2+3+6=11 \text{ 通り}$$

(4.5) ①②③の３色を使用するもの

(4.5.1) a,a,a,a,b,c タイプ： ${}_3\mathrm{C}_1 \times 2 = 6$ 通り

(4.5.2) a,a,a,b,b,c タイプ： ${}_3\mathrm{P}_3 \times 3 = 18$ 通り

(4.5.3) a,a,b,b,c,c タイプ： 6 通り

(4.5.4) 合計： $f(3,3) = 6 + 18 + 6 = 30$ (通り)

(4.6) n 色のうちの３色を使用する塗り方

$$f(n,3) = 30 \times {}_n\mathrm{C}_3 = 5n(n-1)(n-2) \quad \text{(通り)}$$

(5) ２色使用する場合

(5.1) ①①①①①②を使う塗り方： 1 通り

(5.2) ①①①①②②を使う塗り方： 2 通り

(5.3) ①①①②②②を使う塗り方： 2 通り

(5.4) 合計： $1 + 2 + 2 = 5$ 通り

(5.5) ①②の２色を使用するもの

(5.5.1) a,a,a,a,a,b タイプ： ${}_2\mathrm{C}_1 \times 1 = 2$ 通り

(5.5.2) a,a,a,a,b,b タイプ： ${}_2\mathrm{C}_1 \times 2 = 4$ 通り

(5.5.3) a,a,a,b,b,b タイプ： 2 通り

(5.5.4) 合計： $f(2,2) = 2 + 4 + 2 = 8$ (通り)

(5.6) n 色のうちの２色を使用する塗り方

$$f(n,2) = 8 \times {}_n\mathrm{C}_2 = 4n(n-1) \quad \text{(通り)}$$

(6) １色使用する場合

(6.1) ①のみを使用するもの： $f(1,1) = 1$ (通り)

(6.2) n 色のうちの１色を使用する塗り方： $f(n,1) = 1 \times {}_n\mathrm{C}_1 = n$ (通り)

(7) まとめ

k	1	2	3	4	5	6
$f(1,k)$	1					
$F(1,k)$	1					
$f(2,k)$	2	8				
$F(2,k)$	2	10				
$f(3,k)$	3	24	30			
$F(3,k)$	3	27	57			
$f(4,k)$	4	48	120	68		
$F(4,k)$	4	52	172	240		
$f(5,k)$	5	80	300	340	75	
$F(5,k)$	5	85	385	725	800	
$f(6,k)$	6	120	600	1020	450	30
$F(6,k)$	6	126	726	1746	2196	2226

(8) $F(n,n)$ を直接求める

(8.1) a と a', b と b', c と c' が対面になるように塗るとする。a,b,c の面が時計回りになる塗り方と，反時計回りになる塗り方の２通りあり，互いに鏡像になる。同じ色を使用している場合，この２つが一致することがある。したがって，１つの対面トリオ $(a-a',\ b-b',\ c-c')$ から，１通りまたは２通りの異なる塗り方が得られる。

(8.2) 塗り方が１通りの（鏡像が一致する）対面トリオは，次の２条件のいずれかを満たす。

対面が同じ色のペアがある	(たとえば, $a=a'$)
同じペアがある	(たとえば, $\{a,a'\}=\{b,b'\}$)

逆に塗り方が２通りの（鏡像が一致しない）対面トリオは，次の２条件の両方を満たす。

異なる色のペアのみからなる
３つのペアがすべて異なる

(8.3) n 色使用可能のとき，対面トリオの総数

$$\begin{array}{lll} P = {}_n\mathrm{H}_2 = {}_{n+1}\mathrm{C}_2 & \cdots & \text{ペアの総数} \\ T = {}_P\mathrm{H}_3 = {}_{P+2}\mathrm{C}_3 & \cdots & \text{トリオの総数} \end{array}$$

(8.4) 鏡像が一致しない対面トリオの総数

$$\begin{array}{lll} P' = {}_n\mathrm{C}_2 & \cdots & \text{異なる色のペアの総数} \\ T' = {}_{P'}\mathrm{C}_3 & \cdots & \text{異なる３つのペアからなるトリオの総数} \end{array}$$

(8.5) 塗り方の総数

$$\begin{aligned} F(n,n) &= 1\times(T-T')+2\times T' = T+T' \\ &= {}_{\frac{n^2+n+4}{2}}\mathrm{C}_3 + {}_{\frac{n^2-n}{2}}\mathrm{C}_3 \\ &= \frac{(n^2+n+4)(n^2+n+2)(n^2+n)+(n^2-n)(n^2-n-2)(n^2-n-4)}{48} \\ &= \frac{n^2(n+1)\left(n^2(n-1)+4(n+2)\right)}{24} \end{aligned}$$