$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{p_n}$ を解にもつ整数係数の方程式

問題

$f(x)$, $g(x)$, $f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ は，係数が整数の多項式とする．

(1) $f\left(\sqrt{2}\right)=0$ を満たす $f(x)$ を 1 つ挙げなさい．

(2) $g\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)=0$ を満たす $g(x)$ を 1 つ挙げなさい．

(3) n 個の素数 p_k $(k=1,2,\ldots,n)$ に対して，$\alpha_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{p_k}$ とする．

$f_n(\alpha_n)=0$ を満たす $f_n(x)$ が存在することを示しなさい．

解答

(注) $f(\alpha)=0$ とは，方程式 $f(x)=0$ が $x=\alpha$ を解にもつということです．

(1)

$$x=\sqrt{2}\ \to\ x^2=2\ \to\ x^2-2=0$$

ゆえに

$$f(x)=x^2-2$$

これは要件を満たす.

(注) $f(x)=0$ の解は

$$x=\pm\sqrt{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}
x=\sqrt{2}+\sqrt{3}\ &\to\ x-\sqrt{3}=\sqrt{2}\\
&\to\ x^2-2\sqrt{3}x+3=2\\
&\to\ x^2+1=2\sqrt{3}x\\
&\to\ x^4+2x^2+1=12x^2\\
&\to\ x^4-10x^2+1=0
\end{aligned}$$

ゆえに

$$g(x)=x^4-10x^2+1$$

これは要件を満たす.

(注) $g(x)=0$ の解は

$$x^4-10x^2+1=0$$

$$x^2=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt{6}=3\pm2\sqrt{3\cdot2}+2=\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)^2$$

$$\therefore\ x=\pm\left(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}\right)=\pm\sqrt{3}\pm\sqrt{2}$$

(注)　$f(x)$，$g(x)$ を見なおしてみると

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \\ g(x) &= \left(x-\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \\ &= f\left(x-\sqrt{3}\right)\cdot f\left(x+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

になっています.

また

$$\begin{aligned} f\left(x-\sqrt{3}\right) &= \left(x-\sqrt{3}\right)^2-2 = x^2-2\sqrt{3}x+3-2 = \left(x^2+1\right)-\sqrt{3}\left(2x\right) \\ f\left(x+\sqrt{3}\right) &= \left(x+\sqrt{3}\right)^2-2 = x^2+2\sqrt{3}x+3-2 = \left(x^2+1\right)+\sqrt{3}\left(2x\right) \\ \therefore\ \ g(x) &= \left(x^2+1\right)^2-3\left(2x\right)^2 = x^4-10x^2+1 \end{aligned}$$

(注)　$x=\alpha_n=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{p_n}$ を解にもつような $f_n(x)$ をひとつ作ればよいわけです. 上の例から $f_n(x)=0$ の解が $x=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\cdots\pm\sqrt{p_n}$（$2^n$個）となるものとすればよさそうです.

(3)　$f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ を帰納的に定義する.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \\ f_{k+1}(x) &= f_k\left(x-\sqrt{p_{k+1}}\right)\cdot f_k\left(x+\sqrt{p_{k+1}}\right) \quad (k=1,2,\cdots,n-1) \end{aligned}$$

$f_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ の係数が整数であることを数学的帰納法で証明する.

(i)
$$f_1(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=x^2-2$$

たしかに，係数は整数である.

(ii) 仮定: $f_k(x)$ は係数が整数である.
目標: $f_{k+1}(x)$ は係数が整数である.

$f\left(x\pm\sqrt{p_{k+1}}\right)$ を展開して係数が整数の項と非整数の項を整理すると，整数係数の多項式 $g_k(x)$ と $h_k(x)$ を用いて，次のように表せる.

$$\begin{aligned} f_k\left(x-\sqrt{p_{k+1}}\right) &= g_k(x)\ -\ \sqrt{p_{k+1}}\,h_k(x) \\ f_k\left(x+\sqrt{p_{k+1}}\right) &= g_k(x)\ +\ \sqrt{p_{k+1}}\,h_k(x) \\ \therefore\ f_{k+1}(x) &= \left(g_k(x)\right)^2-p_{k+1}\left(h_k(x)\right)^2 \end{aligned}$$

たしかに，係数は整数である.

注　素数でなくても，非平方数 a_k $(k=1,2,\ldots,n)$ について同様のことが成り立ちます.