1　最短路

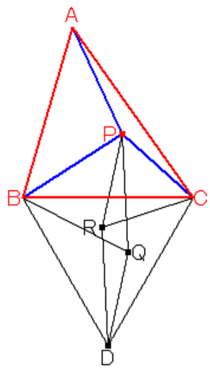
問題 1.1　鋭角三角形 ABC の頂点との距離の和

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}$$

が最小になる点 P，すなわち，3 点 A, B, C を結ぶ最短路を求めよ。

解答

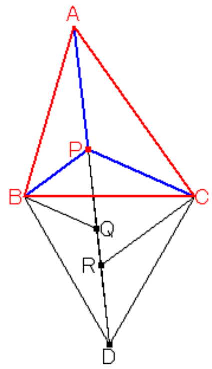
正三角形 CBD を描く。
三角形 ABC の内部の任意の点 P について，正三角形 PBQ を描く。



$$\begin{aligned}&\mathrm{PB}=\mathrm{QB}\\&\mathrm{BC}=\mathrm{BD}\\&\angle\mathrm{PBC}=60^\circ-\angle\mathrm{CBQ}=\angle\mathrm{QBD}\\&\therefore\ \triangle\mathrm{PBC}\equiv\triangle\mathrm{QBD}\\&\therefore\ \mathrm{PC}=\mathrm{QD}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}=\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}\geqq\mathrm{AD}$$



同様に，正三角形 CPR を描くと

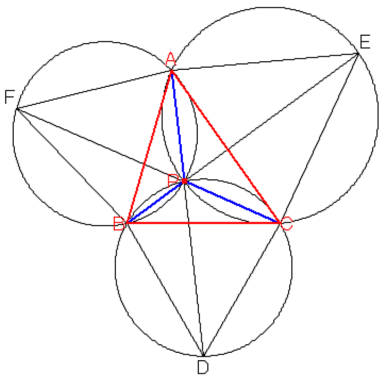
$$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC}=\mathrm{AP}+\mathrm{PR}+\mathrm{RD}\geqq\mathrm{AD}$$

A, P, Q, R, D が一直線になるような P をとると，最小値 AD になる。
このとき，$\angle\mathrm{BPC}=120^\circ$ となり，4 点 P, B, D, C は同一円周上にある。
すなわち，点 P は，正三角形 CBD の外接円と直線 AD の交点である。

注 1.1　点 P は

正三角形CBDの外接円
正三角形ACEの外接円
正三角形BAFの外接円
直線AD
直線BE
直線CF

の交点である。



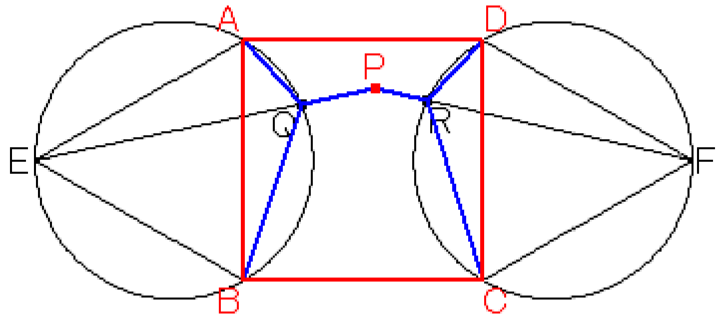
注 1.2　鋭角三角形でなくても，最大の角が 120° 以下の三角形に通用する。
$\angle\mathrm{A}>120^\circ$ のときは，$\mathrm{P}=\mathrm{A}$ のとき最短になる。

問題 1.2　正方形 ABCD の各頂点を結ぶ最短路を求めよ。

解答

正三角形 BAE，DCF を描く。

正方形内の任意の点 P について，3 点 A, B, P 結ぶ最短路 $QA + QB + QP$ と，3 点 C, D, P 結ぶ最短路 $RC + RD + RP$ を描く。



E, Q, P, R, F が一直線になるように P をとると，最小値 EF になる。