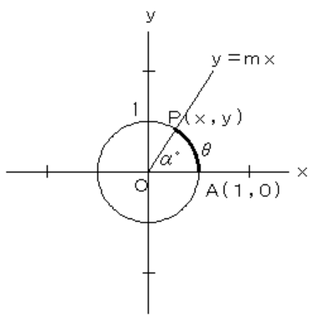
循環論法　？

高校で，三角関数とその微分積分を次のように習います。

1.　三角関数の定義

単位円（中心が原点 $\mathrm{O}(0,0)$，半径が 1 の円）の周上の点 $\mathrm{P}(x,y)$ を考える。
$\angle\mathrm{AOP}$ を α°，弧 (arc) $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}$ の長さを θ とすると，半円のときと比べることによって次の関係が成り立つことがわかる。



$$\alpha^\circ : 180^\circ = \theta : \pi$$

$$\alpha^\circ = \frac{\theta}{\pi}180^\circ$$

$$\theta = \frac{\alpha}{180}\pi$$

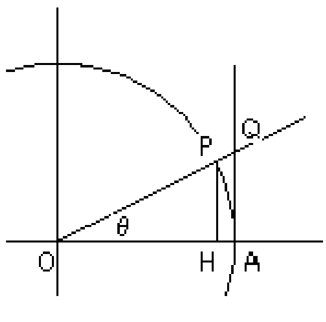
定義 1 (ラジアン)　弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}} = \theta$ と角 $\angle\mathrm{AOP} = \alpha^\circ$ を同一視する。すなわち，θ を角とみなす。この単位を弧度 (radian) という。

定義 2 (三角関数)　点 P の x 座標，y 座標，半直線 OP の傾き m を，弧度 θ で表したものをそれぞれ次のように表す。

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta \quad (= \cos\alpha^\circ) \\ y &= \sin\theta \quad (= \sin\alpha^\circ) \\ m &= \tan\theta \quad (= \tan\alpha^\circ) \end{aligned}$$

2.　$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$

右図で，三角形 OAP，扇形 OAP，三角形 OAQ の面積を比べることにより



$$\frac{\sin\theta}{2} \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \frac{\tan\theta}{2}$$

$$\therefore\ 1 \leqq \frac{\theta}{\sin\theta} \leqq \frac{1}{\cos\theta}$$

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta} = 1$ だから

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

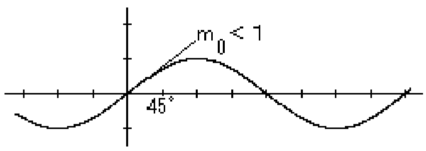
$$\therefore\quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

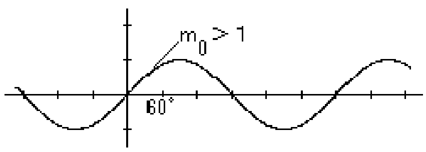
3.　三角関数の微分

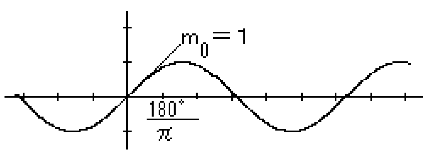
$\sin x$ の導関数を定義に従って求める。

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{t\to 0}\frac{\sin(x+t)-\sin x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin x\cos t+\cos x\sin t-\sin x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin t\cos x-(1-\cos t)\sin x}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cos x-\frac{1-\cos t}{t}\sin x\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cos x-\frac{1-\cos^2 t}{t(1+\cos t)}\sin x\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\cos x-\frac{\sin^2 t}{t(1+\cos t)}\sin x\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\left(\cos x-\frac{\sin t}{1+\cos t}\sin x\right)\right) \\
&= m_0\left(\cos x-\frac{0}{2}\sin x\right) \\
&\qquad \left(m_0=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\text{とおいた}\right) \\
&= m_0\ \cos x
\end{aligned}
$$

注　m_0 は原点 (0,0) における $y = \sin x$ の接線の傾きである。これは，x 軸の目盛り 1 を何度にするかによって定まる。。目盛り 1 を 45° にすると傾きは 1 より小さくなり，目盛り 1 を 60° にすると傾きは 1 より大きくなる。目盛り 1 を $\dfrac{180}{\pi}^\circ$，すなわち 1 ラジアンにすると傾きがちょうど 1 になる。**このために，角の単位として（° でなく）ラジアンを使うのである。**







ゆえに

$$(\sin x)' = \cos x$$

4.　円の面積

半径が r の円の面積を S とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,dx \qquad (x=r\cos\theta(0\leqq\theta\leqq\pi)\ \text{と置く}) \\
&= 2\int_{\pi}^{0} r\sin\theta(-r\sin\theta)\,d\theta \\
&= -r^2\int_{\pi}^{0} 2\sin^2\theta\,d\theta \\
&= -r^2\int_{\pi}^{0} (1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= -r^2\left[\,\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\right]_{\pi}^{0} \\
&= \pi r^2 \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}
$$

5.　円周の長さ

半径が r の円周の長を ℓ とおくと

$$
\begin{aligned}
\ell &= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)'\right)^2}\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx \\
&= 2r\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx \qquad (x=r\cos\theta(0\leqq\theta\leqq\pi)\ \text{と置く}) \\
&= 2r\int_{\pi}^{0}\frac{1}{r\sin\theta}(-r\sin\theta)\,d\theta \\
&= 2r\int_{\pi}^{0} -1\,d\theta \\
&= 2r\left[\,-\theta\,\right]_{\pi}^{0} \\
&= 2\pi r \qquad \cdots\cdots ②
\end{aligned}
$$

6.　円周と面積の関係

4,5 節で求めた 2 つの式から

$$S=\frac{1}{2}\ell r \qquad \cdots\cdots ③$$

7. 何が問題か ?

扇形の**弧の長さ**を元にして角の単位ラジアンを定義したのに，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を示すときには，扇形の**面積**を用いた。前者は π の性質②を用い，後者は π の性質①を用いている。この 2 つの性質を両方とも使ってよいのだろうか?

円周と面積の関係 ③ が証明されていれば，この 2 つの性質①と②は同値なので，両方使ってかまわない。小学校で，円を櫛の歯状に細分したものを並べかえて長方形に近い形に変形する（`http://ooya-takemasa.thick.jp/Algorithm/Math.html#EnsyuuToMenseki` の「円周と面積の関係」参照）ことで③を説明しているが，厳密な証明ではない。したがって，両方を使うことはできない。

8. 解決

角の単位ラジアンを弧長ではなく面積を用いて定義するように修正することで解決する。円周率という名称は $\pi=$ 円周/直径 を表したものであるが，$\pi=$ 面積/半径^2 を π の定義とし，ラジアンの定義を次のように変更する。

定義 1 (ラジアン) 半径が $\mathbf{1}$ で面積が $\dfrac{\theta}{\mathbf{2}}$ の扇形の中心角を θ ラジアンと定める。

この定義から始めると上で示したように，定積分を計算することによって，面積①を確認し，円周の長さ②と，円周と面積の関係③が導かれ，問題はない.