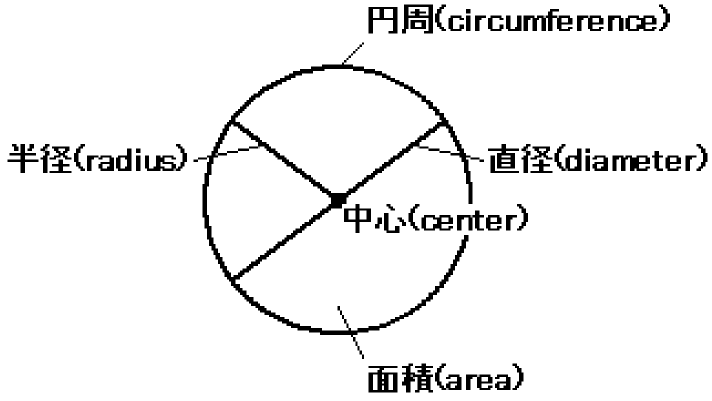
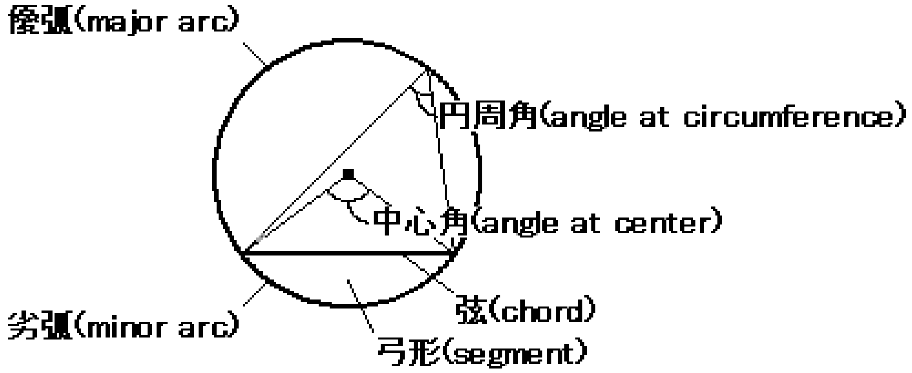
1　三角比の導入

1.1　円に関する用語



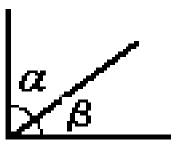


1.2　角に関する用語

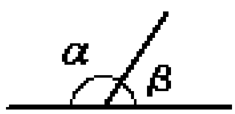
0°	···	90°	···	180°	···	360°
	鋭角 acute angle	直角 right angle	鈍角 obtuse angle			
	劣角 inferior angle			平角 straight angle	優角 superior angle	

αとβが余角 (complementary angle) $\iff$ $\alpha+\beta=$ 直角 (90°)

αとβが補角 (supprementary angle) $\iff$ $\alpha+\beta=$ 平角 (180°)



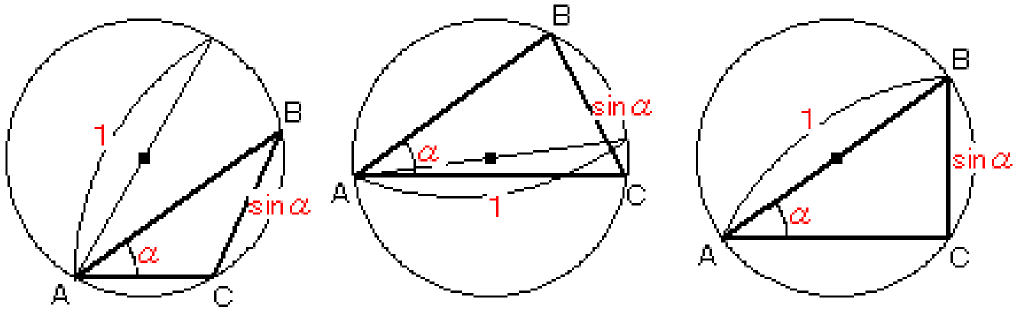
余角



補角

1.3　正弦の導入

1 つの円に内接する三角形 ABC で角 A の大きさが同じものは辺 BC の長さも同じである。すなわち，角の大きさ A を定めると，それに応じて辺 BC の長さ a が定まる。



定義 1　正弦 (sine)
直径が 1 の円に内接する三角形において，角 A に**正**対する**弦** BC の長さ a を，角 A の**正弦 (sine)** と言い，$\sin A$ と書く。

円を大きくすると，それに比例して BC も大きくなる。

公式 1　正弦定理
直径が $2R$ の円に内接する三角形 ABC において

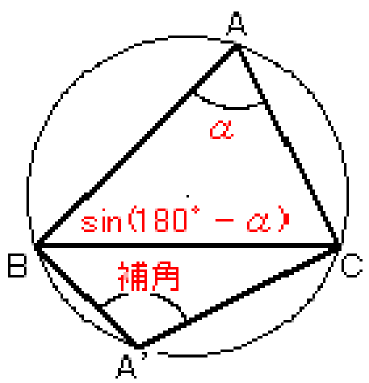
$$a = 2R\sin A\ ,\ b = 2R\sin B\ ,\ c = 2R\sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

弦 BC に対して，頂点 A を優弧上，A′ を劣弧上にとると，角 A は鋭角，A' は鈍角で，互いに補角である。ゆえに，

公式 2　補角公式 (sin)

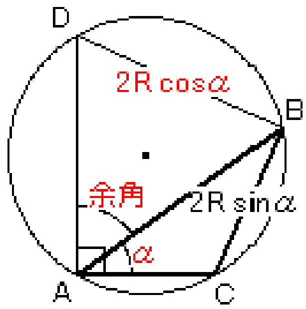
$$\sin(180^\circ - A) = \sin A$$

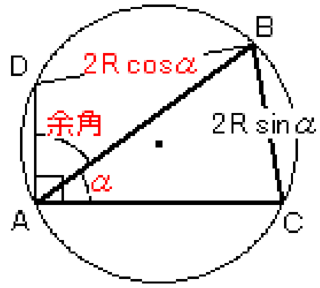


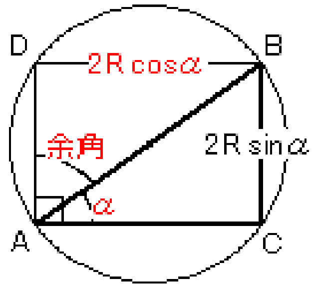
1.4　鋭角の余弦

定義 2　鋭角の余弦 (cosine)
鋭角 A の**余**角 (co-angle) の正**弦** (sine) を角 A の**余弦 (cosine)** と言い，$\cos A$ と書く。

$$\cos A = \sin(90^\circ - A)$$

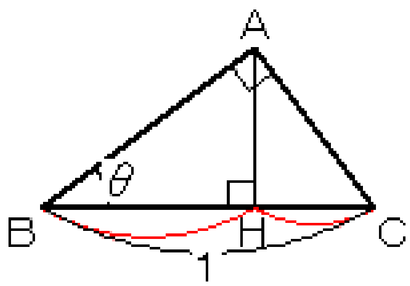






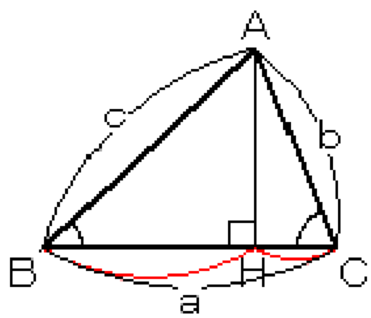
公式 3　相互関係

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$



公式 4　第一余弦定理

$$a = c\cos B + b\cos C$$
$$b = a\cos C + c\cos A$$
$$c = b\cos A + a\cos B$$

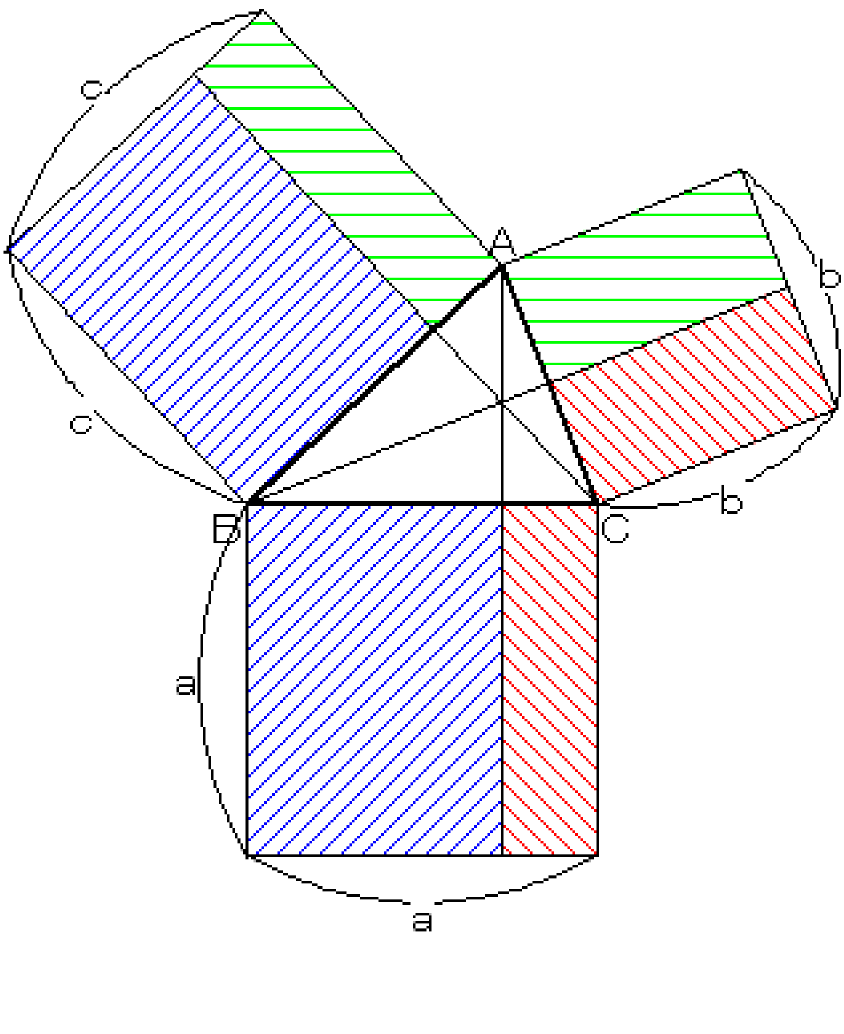


第一余弦定理の式に，順に a, b, c を掛けて，一番目の式から二番目，三番目の式を引くと，第二余弦定理が得られる。

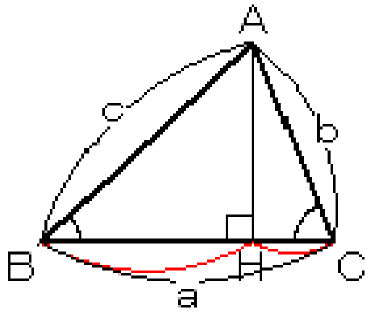
$$\begin{aligned} a^2 &= ac\cos B + ab\cos C \\ b^2 &= ba\cos C + bc\cos A \\ c^2 &= cb\cos A + ca\cos B \\ a^2 - b^2 - c^2 &= -2bc\cos A \end{aligned}$$

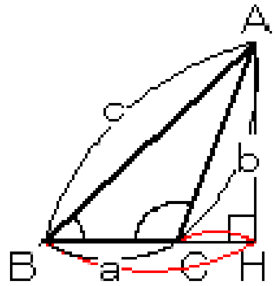
公式 5　第二余弦定理

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$



1.5　三角比の拡張





左の図で，次の公式が得られる。

$$\begin{aligned} c\sin B &= b\sin C & &\cdots \text{正限定理 (の別表現)} \\ a &= c\cos B + b\cos C & &\cdots \text{第一余弦定理} \end{aligned}$$

右の図で，次の式が得られる。

$$\begin{aligned} c\sin B &= b\sin(180^\circ - C) \\ a &= c\cos B + b\cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

右の図でも，正弦定理，余弦定理が成り立つように，鈍角の三角比を定義する。

定義 3　鈍角の三角比

$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(180^\circ - C) \\ \cos C &= -\cos(180^\circ - C) \end{aligned}$$

余角と補角について次の関係が成り立つ。

公式 6　余角公式

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \theta) &= \cos\theta \\ \cos(90^\circ - \theta) &= \sin\theta \end{aligned}$$

公式 7　補角公式

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \theta) &= \sin\theta \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\cos\theta \end{aligned}$$

1.6　一般角に拡張

上の公式は，両辺の角が劣角（0°～180°）として求めた式であるが，これが成り立つように一般角に拡張する。

公式 8

$$
\begin{aligned}
\sin(-\theta) &= -\sin\theta & \cos(-\theta) &= +\cos\theta \\
\sin(+\theta) &= +\sin\theta & \cos(+\theta) &= +\cos\theta \\
\sin(90^\circ-\theta) &= +\cos\theta & \cos(90^\circ-\theta) &= +\sin\theta \\
\sin(90^\circ+\theta) &= +\cos\theta & \cos(90^\circ+\theta) &= -\sin\theta \\
\sin(180^\circ-\theta) &= +\sin\theta & \cos(180^\circ-\theta) &= -\cos\theta \\
\sin(180^\circ+\theta) &= -\sin\theta & \cos(180^\circ+\theta) &= -\cos\theta \\
\sin(270^\circ-\theta) &= -\cos\theta & \cos(270^\circ-\theta) &= -\sin\theta \\
\sin(270^\circ+\theta) &= -\cos\theta & \cos(270^\circ+\theta) &= +\sin\theta \\
\sin(360^\circ-\theta) &= -\sin\theta & \cos(360^\circ-\theta) &= +\cos\theta \\
\sin(360^\circ+\theta) &= +\sin\theta & \cos(360^\circ+\theta) &= +\cos\theta
\end{aligned}
$$

1.7　加法定理

問題 1　直径 $AD=1$ とする。

(1)　$\triangle ABC$ に正弦定理を用いて，AB, AC を α, β で表しなさい。

(2)　$\triangle ABC$ に第一余弦定理を用いて，BC を α, β で表しなさい。

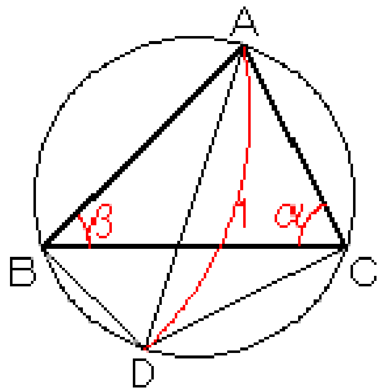
(3)　$\angle BDC$ を α, β で表しなさい。

(4)　$\triangle DBC$ に正弦定理を用いて BC を α, β で表しなさい。

(5)　(2),(4) より，$\sin(\alpha+\beta)$ の公式を導きなさい。

(6)　$\triangle DBC$ に第二余弦定理を用いて BC^2 を α, β で表しなさい。

(7)　(2),(6) より，$\cos(\alpha+\beta)$ の公式を導きなさい。



公式 9　加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$