正規分布の密度関数

標準正規分布 $N(0,1)$ の確率密度関数は $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ である。ということは,

$$(1)\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad (\text{全事象の確率})$$

$$(2)\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = 0 \quad (\text{平均})$$

$$(3)\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = 1 \quad (\text{分散})$$

でなければならない。これを確認する。

(1)　全事象の確率

$I(a) = \displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$ とおく。

$$\begin{aligned} I(a)^2 &= \int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \int_{-a}^{a} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \right) e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \\ &= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dx\,dy = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy \end{aligned}$$

これは，曲面 $z = g(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ と xy 平面に挟まれた立体 $S : 0 \leqq z \leqq g(x,y)$ を，正方形 $D : -a \leqq x \leqq a,\ -a \leqq y \leqq a$ で垂直に切り取った部分の体積である。

正方形 D の内接円 $C_1 : x^2 + y^2 \leqq a^2$ と外接円 $C_2 : x^2 + y^2 \leqq 2a^2$ を考える。立体 S を，円 C_1，C_2 で垂直に切り取った部分の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると $V_1 \leqq I(a)^2 \leqq V_2$ が成り立つ。

$z = g(x,y)$ は $z = e^{-\frac{x^2}{2}}$ を z 軸のまわりに回転してできる回転面だから，V_1，V_2 は回転体の体積の公式を使って求められる。

$$V_1 = \int_0^a 2\pi x e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Big[-2\pi e^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_0^a = 2\pi \left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right)$$

$$V_2 = \Big[-2\pi e^{-\frac{x^2}{2}} \Big]_0^{\sqrt{2}a} = 2\pi \left(1 - e^{-a^2} \right)$$

ここで，$a \to \infty$ とすると

$$\lim_{a\to\infty} V_1 = \lim_{a\to\infty} 2\pi \left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right) = 2\pi$$

$$\lim_{a\to\infty} V_2 = \lim_{a\to\infty} 2\pi \left(1 - e^{-a^2} \right) = 2\pi$$

$$\therefore\ \lim_{a\to\infty} I(a)^2 = 2\pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \lim_{a\to\infty} I(a) = \sqrt{2\pi}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

(2)　平均

$$\int_a^b xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \Big[\ -e^{-\frac{x^2}{2}}\ \Big]_a^b = e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\frac{e^{-\frac{a^2}{2}} - e^{-\frac{b^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

(3)　分散

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{u}\underbrace{xe^{-\frac{x^2}{2}}}_{v'}\,dx = \Big[\ x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\ \Big]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} 1\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)dx$$

$$= \Big[\ x\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\ \Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0 + \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1$$

(注) $\lim_{x\to\infty} x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)$ **の値**

$x > 0$ について

$$e^x > x + 1 > x$$

$$0 < e^{-x} < \frac{1}{x}$$

$$0 < e^{-\frac{x^2}{2}} < \frac{2}{x^2}$$

$$0 < xe^{-\frac{x^2}{2}} < \frac{2}{x}$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 0$ だから

$$\lim_{x\to\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0$$