

1 整数の大小関係

整数 m, n について	
$m < n \Leftrightarrow m + 1 \leq n$	$m < n \Leftrightarrow m \leq n - 1$
$m \leq n \Leftrightarrow m - 1 < n$	$m \leq n \Leftrightarrow m < n + 1$

問題 1.1 正の整数 a, b, c, d が次の条件を満たしている.

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \quad \text{かつ} \quad ad - bc = 1$$

このとき, 自然数 p, q について, 次のことが成り立つことを示しなさい.

(1) $p = a + c, \quad q = b + d$ とすると $\frac{b}{a} < \frac{q}{p} < \frac{d}{c}$

(2) $\frac{b}{a} < \frac{q}{p} < \frac{d}{c}$ ならば $p \geq a + c, \quad q \geq b + d$

問題 1.2 箱が m 個あって, 1 番から m 番まで番号が付いている. それぞれの箱に, 玉が n 個ずつ入っていて, 1 番から n 番まで番号が付いている. それぞれの箱から 1 個ずつ玉を取り出す. k 番目の箱から取り出した玉の番号を a_k とする.

このとき, つぎの条件を満たすような選び方は全部で何通りあるか.

(1) 無条件 (各箱から 1 個ずつ取り出す).

(2) $a_k (k = 1, 2, \dots, m)$ がすべて異なる.

(3) $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_m \leq n$

(4) $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m \leq n$

(5) $1 \leq a_1 \ll a_2 \ll \dots \ll a_m \leq n$

ただし, $x \ll y$ は x と y の間に 1 つ以上の整数がある ($\exists z(x < z < y)$) ことを表す.

定義 1.1 x 座標, y 座標が共に整数である点を格子点という.

問題 1.3 3 つの頂点がすべて格子点である鋭角三角形の面積は 1 以上であることを示しなさい.

問題 1.4 次の条件を満たす 11 個の整数の列 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ を求めなさい. なるべく絶対値が小さいものが望ましい.

条件 1: 連続して並んでいる 8 個の和はすべて正である.

条件 2: 連続して並んでいる 5 個の和はすべて負である.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k