1　整数の大小関係　解答

問題 1.1　正の整数 a, b, c, d が次の条件を満たしている．

$$\frac{b}{a} < \frac{d}{c} \quad \text{かつ} \quad ad - bc = 1$$

このとき，自然数 p, q について，次のことが成り立つことを示しなさい．

(1)　$p = a + c, \quad q = b + d$　とすると　$\dfrac{b}{a} < \dfrac{q}{p} < \dfrac{d}{c}$

(2)　$\dfrac{b}{a} < \dfrac{q}{p} < \dfrac{d}{c}$　ならば　$p \geqq a + c, \quad q \geqq b + d$

解答 1.1

(1)
$$\frac{q}{p} - \frac{b}{a} = \frac{aq - bp}{ap} = \frac{(ab + ad) - (ba + bc)}{ap} = \frac{ad - bc}{ap} = \frac{1}{ap} > 0$$

$$\frac{d}{c} - \frac{q}{p} = \frac{dp - cq}{cp} = \frac{(da + dc) - (cb + cd)}{cp} = \frac{ad - bc}{cp} = \frac{1}{cp} > 0$$

(2)　$\dfrac{q}{p} > \dfrac{b}{a}$ より　$aq > bp$　$\therefore\ aq - bp > 0$

$\therefore\ aq - bp \geqq 1 \quad \cdots ①$

$\dfrac{d}{c} > \dfrac{q}{p}$ より　$dp > cq$　$\therefore\ dp - cq > 0$

$\therefore\ dp - cq \geqq 1 \quad \cdots ②$

② $\times a +$ ① $\times c$ より　$(ad - bc)p \geqq a + c$　$\therefore\ p \geqq a + c$

① $\times d +$ ② $\times b$ より　$(ad - bc)q \geqq d + b$　$\therefore\ q \geqq b + d$

問題 1.2　箱が m 個あって，1 番から m 番まで番号が付いている。それぞれの箱に，玉が n 個ずつ入っていて，1 番から n 番まで番号が付いている。それぞれの箱から 1 個ずつ玉を取り出す。k 番目の箱から取り出した玉の番号を a_k とする。

このとき，つぎの条件を満たすような選び方は全部で何通りあるか。

(1) 無条件 (各箱から 1 個ずつ取り出す)。

(2) $a_k\,(k=1,2,\ldots,m)$ がすべて異なる。

(3) $1 \leqq a_1 < a_2 < \cdots < a_m \leqq n$

(4) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_m \leqq n$

(5) $1 \leqq a_1 << a_2 << \cdots << a_m \leqq n$
ただし，$x << y$ は x と y の間に 1 つ以上の整数がある $\bigl(\exists z(x<z<y)\bigr)$ ことを表す。

解答 1.2　1〜n の番号札を用意して，それから札を選び，その番号の玉を取り出すと考える．

(1) 1〜n の番号札から 1 枚ずつ m 回選ぶ．取り出した札は毎回元に戻す．選んだ順にその番号の玉を各箱から取り出す．
n^m 通り

(2) 1〜n の番号札から 1 枚ずつ m 回選ぶ．取り出した札は元に戻さない．選んだ順 にその番号の玉を各箱から取り出す．
${}_n\mathrm{P}_m$ 通り

(3) 1〜n の番号札から m 枚選ぶ．小さい番号順 にその番号の玉を各箱から取り出す．
${}_n\mathrm{C}_m$ 通り．

(4) $1 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_m \leqq n$ は
$1 \leqq a_1 < a_2+1 < a_3+2 < \cdots < a_m+m-1 \leqq n+m-1$ と同じ．
${}_{n+m-1}\mathrm{C}_m$ 通り．

(5) $1 \leqq a_1 << a_2 << a_3 << \cdots << a_m \leqq n$ は
$1 \leqq a_1 < a_2-1 < a_3-2 < \cdots < a_m-m+1 \leqq n-m+1$ と同じ．
${}_{n-m+1}\mathrm{C}_m$ 通り．

問題 1.3　3 つの頂点がすべて格子点である鋭角三角形の面積は 1 以上であることを示しなさい．

解答 1.3 3 つの頂点を O$(0,0)$,A(a,c),B(b,d) とする．

三角形 ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|ad-bc|$$

三角形 OAB が鋭角三角形である条件は

$$\begin{cases} \mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2>\mathrm{AB}^2 & \cdots ① \\ \mathrm{OB}^2+\mathrm{AB}^2>\mathrm{OA}^2 & \cdots ② \\ \mathrm{OA}^2+\mathrm{AB}^2+\mathrm{OB}^2 & \cdots ③ \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&① \cdots\ a^2+c^2+b^2+d^2>(a-b)^2+(c-d)^2 \quad \therefore\ ab+cd>0 \\
&\qquad\quad \therefore\ ab+cd \geqq 1 \\
&② \cdots\ (b^2+d^2)+(a-b)^2+(c-d)^2>a^2+b^2 \quad \therefore\ b^2+d^2>ab+cd \\
&\qquad\quad \therefore\ b^2+d^2 \geqq ab+cd+1 \\
&③ \cdots\ (a^2+c^2)+(a-b)^2+(c-d)^2>c^2+d^2 \quad \therefore\ a^2+c^2>ab+cd \\
&\qquad\quad \therefore\ a^2+c^2 \geqq ab+cd+1
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}
&(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geqq (ab+cd+1)^2 \\
&a^2d^2-2abcd+b^2c^2 \geqq 2(ab+cd)+1>1 \\
&|ad-bc|^2>1 \quad \therefore\ |ad-bc|>1 \quad \therefore\ |ad-bc| \geqq 2 \\
&\therefore\ \triangle\mathrm{ABC} \geqq 1
\end{aligned}$$

問題 1.4 次の条件を満たす 11 個の整数の列 $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$ を求めなさい。なるべく絶対値が小さいものが望ましい。

条件 1： 連続して並んでいる 8 個の和はすべて正である。
条件 2： 連続して並んでいる 5 個の和はすべて負である。

解答 1.4

条件 1： 連続して並んでいる 8 個の和はすべて 1 以上である。
条件 2： 連続して並んでいる 5 個の和はすべて-1以下である。

と同じ.

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d+e+f+g+h &\geqq +1\\
b+c+d+e+f+g+h+i &\geqq +1\\
c+d+e+f+g+h+i+j &\geqq +1\\
d+e+f+g+h+i+j+k &\geqq +1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b+c+d+e &\leqq -1\\
b+c+d+e+f &\leqq -1\\
c+d+e+f+g &\leqq -1\\
d+e+f+g+h &\leqq -1\\
e+f+g+h+i &\leqq -1\\
f+g+h+i+j &\leqq -1\\
g+h+i+j+k &\leqq -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b+c &\geqq +2\\
b+c+d &\geqq +2\\
c+d+e &\geqq +2\\
d+e+f &\geqq +2\\
f+g+h &\geqq +2\\
g+h+i &\geqq +2\\
h+i+j &\geqq +2\\
i+j+k &\geqq +2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a+b &\leqq -3\\
b+c &\leqq -3\\
d+e &\leqq -3\\
e+f &\leqq -3\\
f+g &\leqq -3\\
g+h &\leqq -3\\
i+j &\leqq -3\\
j+k &\leqq -3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &\geqq +5\\
c &\geqq +5\\
d &\geqq +5\\
f &\geqq +5\\
h &\geqq +5\\
i &\geqq +5\\
k &\geqq +5
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b &\leqq -8\\
e &\leqq -8\\
g &\leqq -8\\
j &\leqq -8
\end{aligned}
$$

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
5	-8	5	5	-8	5	-8	5	5	-8	5