

# 1 整数の剰余

定理 1.1 ( $n$ 桁の自然数  $x = a_n \cdots a_3 a_2 a_1$  を  $p$  で割った余り)

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 \text{ を } p \text{ で割った余り} \\ r_2 &= 10 \text{ を } p \text{ で割った余り} \\ r_3 &= 100 \text{ を } p \text{ で割った余り} = r_2 \times r_2 \text{ を } p \text{ で割った余り} \\ r_4 &= 1000 \text{ を } p \text{ で割った余り} = r_3 \times r_2 \text{ を } p \text{ で割った余り} \\ &\vdots \\ r_n &= 10^{n-1} \text{ を } p \text{ で割った余り} = r_{n-1} \times r_2 \text{ を } p \text{ で割った余り} \end{aligned}$$

$$S(x) = r_1 \times a_1 + r_2 \times a_2 + r_3 \times a_3 + \cdots + r_n \times a_n$$

とすると

$$x \text{ を } p \text{ で割った余り} = S(x) \text{ を } p \text{ で割った余り}$$

定義 1.1 (演算子 mod)

$x$  を  $p$  で割った余り を  $x \bmod p$  と略記する

注 1.1 (負の余り) 本当の余りは  $r = 0, 1, 2, 3, \dots, p-2, p-1$  であるが, 負の余り (すなわち不足)  $r - p = 0, 1 - p, 2 - p, \dots, -3, -2, -1$  も考え, 絶対値が小さい方を  $r_k$  とすると計算が楽である。

注 1.2 ( $r_k$  の計算)  $k \geq 3$  の  $r_k$  は  $r_{k-1}$  を使って計算すると楽に求められる。

$$10^{k-1} \bmod p = 10^{k-2} \times 10 \bmod p = r_{k-1} \times r_2 \bmod p$$

例 1.1 13 で割った余り

$$\begin{aligned} 1 \bmod 13 &= &= 1, -12 &\therefore r_1 = +1 \\ 10 \bmod 13 &= &= 10, -3 &\therefore r_2 = -3 \\ 100 \bmod 13 &= (-3) \times (-3) \bmod 13 &= 9, -4 &\therefore r_3 = -4 \\ 1000 \bmod 13 &= (-4) \times (-3) \bmod 13 &= 12, -1 &\therefore r_4 = -1 \\ 10000 \bmod 13 &= (-1) \times (-3) \bmod 13 &= 3, -10 &\therefore r_5 = +3 \\ 100000 \bmod 13 &= (+3) \times (-3) \bmod 13 &= 4, -9 &\therefore r_6 = +4 \\ 1000000 \bmod 13 &= (+4) \times (-3) \bmod 13 &= 1, -12 &\therefore r_7 = +1 \quad \text{以下繰り返す} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} S(x) &= (a_1 - a_4 + a_7 - a_{10} + \cdots) \\ &\quad -3(a_2 - a_5 + a_8 - a_{11} + \cdots) \\ &\quad -4(a_3 - a_6 + a_9 - a_{12} + \cdots) \end{aligned}$$

$x = 14142135623 = 14142135623$  の場合

$$S(x) = (3 - 5 + 2 - 4) - 3(2 - 3 + 4 - 1) - 4(6 - 1 + 1) = -34 = -13 \cdot 3 + 5$$

$$\therefore 14142135623 \bmod 13 = 5$$

問題 1.1  $x = 967488935102$  を 13 で割った余りを求めなさい。

問題 1.2  $p = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13$  について,  $r_1, r_2, \dots$  と  $S(x)$  を求めなさい。

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$	$\dots$
2	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
3	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$\dots$
4											$\dots$
5											$\dots$
7											$\dots$
8											$\dots$
9											$\dots$
11											$\dots$
13	+1	-3	-4	-1	+3	+4	+1	-3	-4	-1	$\dots$

$p$	$S(x)$
2	$a_1$
3	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
4	
5	
7	
8	
9	
11	
13	$(a_1 - a_4 + a_7 - a_{10} + \dots) - 3(a_2 - a_5 + a_8 - a_{11} + \dots) - 4(a_3 - a_6 + a_9 - a_{12} + \dots)$

問題 1.3 314159265358979 を  $p$  で割った余りを求めなさい。

$p$	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13
余り											

注 1.3 6 で割った余りは 2 で割った余りと 3 で割った余りの組み合わせで定まる。

12 で割った余りは 4 で割った余りと 3 で割った余りの組み合わせで定まる。

定義 1.2 (小町数, 大町数)

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を 1 つずつ使ってできる 9 桁の数を小町数,  
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 を 1 つずつ使ってできる 10 桁の数を大町数という。

問題 1.4  $p$  で割り切れる最小の小町数と最大の小町数を求めなさい。

$p$	最小の小町数	最大の小町数
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
11		

問題 1.5 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 すべてで割り切れる最小の大町数と最大の大町数を求めなさい。

最小の大町数	最大の大町数

問題 1.6 9,8,7,6,5,4,3,2,1 の数字を 1 つずつこの順番で用いて、足し算のみで 100 の倍数を作りなさい。

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 00$$

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 00$$

$$9\ 8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1 = 00$$

問題 1.7 1,2,3,4,5,6,7,8,9 の数字を 1 つずつこの順番で用いて、足し算と引き算のみで 100 を作りなさい。

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

問題 1.8 次の 9 条件をすべて満たす小町数  $x = abcdefghi$  を求めなさい。

条件1)  $a$  が 1 で割り切れる

条件2)  $ab$  が 2 で割り切れる

条件3)  $abc$  が 3 で割り切れる

条件4)  $abcd$  が 4 で割り切れる

条件5)  $abcde$  が 5 で割り切れる

条件6)  $abcdef$  が 6 で割り切れる

条件7)  $abcdefg$  が 7 で割り切れる

条件8)  $abcdefgh$  が 8 で割り切れる

条件9)  $abcdefghi$  が 9 で割り切れる

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$

問題 1.9 4172 は 4, 1, 7, 2 で割り切れる。このように, 次の条件を満たす数で最大のものを求めなさい。

条件 1 各桁の数字がすべて異なる。

条件 2 各桁の数字で割り切れる。