

# 1 整数の剰余 解答

問題 1.1  $x = 967488935102$  を 13 で割った余りを求めなさい。

$$S(x) = (2 - 5 + 8 - 7) - 3(0 - 3 + 8 - 6) - 4(1 - 9 + 4 - 9) = -2 + 3 + 4 \cdot 13$$

∴ 余りは 1

問題 1.2  $p = 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13$  について,  $r_1, r_2, \dots$  と  $S(x)$  を求めなさい。

$p$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$r_5$	$r_6$	$r_7$	$r_8$	$r_9$	$r_{10}$	$\dots$
2	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
3	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$\dots$
4	+1	+2	0	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
5	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
7	+1	+3	+2	-1	-3	-2	+1	+3	+2	-1	$\dots$
8	+1	+2	+4	0	0	0	0	0	0	0	$\dots$
9	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	$\dots$
11	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	$\dots$
13	+1	-3	-4	-1	+3	+4	+1	-3	-4	-1	$\dots$

$p$	$S(x)$
2	$a_1$
3	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
4	$a_1 + 2a_2$
5	$a_1$
7	$(a_1 - a_4 + a_7 - a_{10} + \dots) + 3(a_2 - a_5 + a_8 - a_{11} + \dots) + 2(a_3 - a_6 + a_9 - a_{12} + \dots)$
8	$a_1 + 2a_2 + 4a_3$
9	$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
11	$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \dots)$
13	$(a_1 - a_4 + a_7 - a_{10} + \dots) - 3(a_2 - a_5 + a_8 - a_{11} + \dots) - 4(a_3 - a_6 + a_9 - a_{12} + \dots)$

問題 1.3 314159265358979 を  $p$  で割った余りを求めなさい。

$p$	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12	13
余り	1	2	3	4	5	5	3	5	7	11	1

問題 1.4  $p$  で割り切れる最小の小町数と最大の小町数を求めなさい。

$p$	最小の小町数	最大の小町数
2	123456798	987654312
3	123456789	987654321
4	123457896	987654312
5	123467895	987643215
6	123456798	987654312
7	123456879	987654213
8	123457896	987654312
9	123456789	987654321
11	123475869	987652413

問題 1.5 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 すべてで割り切れる最小の大町数と最大の大町数を求めなさい。

最小の大町数	最大の大町数
1234759680	9876351240

問題 1.6 9,8,7,6,5,4,3,2,1 の数字を 1 つずつこの順番で用いて, 足し算のみで 100 の倍数を作りなさい。

注 1.1 使われる数字の和 45 が 9 の倍数だから, 足し算のみで作った式の値は必ず 9 の倍数になる。

$$\begin{array}{r} 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 900 \\ 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 900 \\ 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4500 \end{array}$$

問題 1.7 1,2,3,4,5,6,7,8,9 の数字を 1 つずつこの順番で用いて, 足し算と引き算のみで 100 を作りなさい。

注 1.2 + の項に使われる数字の和を  $P$ , - の項に使われる数字の和を  $M$  とする。すべての数字の和が 45, 式の値が 100 だから,

$$\begin{aligned} (P + M) \bmod 9 &= 45 \bmod 9 = 0 \\ (P - M) \bmod 9 &= 100 \bmod 9 = 1 \\ \therefore 2M \bmod 9 &= 8 \\ M \bmod 9 &= 4 \end{aligned}$$

である。

$M$	和が $M$ になる数字のセット
4	{4}
13	{4, 9}, {5, 8}, {6, 7}, {2, 3, 8}, {3, 4, 6}
22	(1, 2, 3 は 123 として使わないといけない) {5, 8, 9}, {6, 7, 9}, {4, 5, 6, 7}
29	(1, 2, 3 は 123 として使わないといけない) {4, 5, 6, 7, 9}

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 7 + 8 - 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 + 4 - 5 + 6 + 7 - 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 8 + 9 = 100 \\ 1 + 2 + 3 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100 \end{array}$$

問題 1.8 次の 9 条件をすべて満たす小町数  $x = abcdefghi$  を求めなさい。

- 条件1)  $a$  が 1 で割り切れる : don't care
- 条件2)  $ab$  が 2 で割り切れる :  $b$  が偶数
- 条件3)  $abc$  が 3 で割り切れる :  $a + b + c$  が 3 の倍数
- 条件4)  $abcd$  が 4 で割り切れる :  $2c + d$  が 4 の倍数, 特に  $d$  が偶数
- 条件5)  $abcde$  が 5 で割り切れる :  $e = 5$
- 条件6)  $abcdef$  が 6 で割り切れる :  $d + e + f$  が 3 の倍数,  $f$  が偶数
- 条件7)  $abcdefg$  が 7 で割り切れる :  $(g - d + a) + 3(f - c) + 2(e - b)$  が 7 の倍数
- 条件8)  $abcdefgh$  が 8 で割り切れる :  $4f + 2g + h$  が 8 の倍数, 特に  $h$  が偶数
- 条件9)  $abcdefghi$  が 9 で割り切れる : don't care

$b, d, f, h$  が偶数 and  $a, c, g, i$  が奇数

$\{d, h\} = \{2, 6\}$  and  $\{b, e\} = \{4, 8\}$

$gh = 32$  or  $72$  or  $16$  or  $96$

$ghi = 321$  or  $327$  or  $723$  or  $729$  or  $963$

$def = 258$  or  $654$

$defghi = 258963$  or  $654321$  or  $654327$  or  $654723$  or  $654729$

条件 7 以外の条件を満たすものが, 次の 10 個である。

$abcdefghi = 147258963$  or  $741258963$  or  
 $789654321$  or  $987654321$  or  $189654327$  or  $981654327$   
 $189654723$  or  $981654723$  or  $183654729$  or  $381654729$

条件 7 を満たすものが 1 つだけある。

$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
3	8	1	6	5	4	7	2	9

問題 1.9 4172 は 4, 1, 7, 2 で割り切れる。このように, 次の条件を満たす数で最大のものを求めなさい。

条件 1 各桁の数字がすべて異なる。

条件 2 各桁の数字で割り切れる。

[答] 9867312