1　正多面体

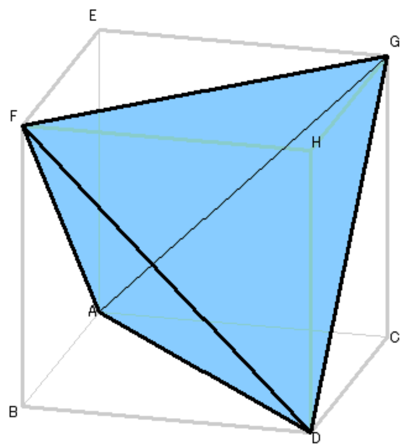
1.1　座標空間で考察

頂点を座標で表して考える。

1.1.1　正四面体

頂点	4 個　$(\pm1, \pm1, \pm1)$　(ただし，$-$ が奇数個)
	$\mathrm{P}_1(-1,-1,-1)$, $\mathrm{P}_2(-1,+1,+1)$, $\mathrm{P}_3(+1,-1,+1)$, $\mathrm{P}_4(+1,+1,-1)$
面	4 個（正三角形）
	$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4$
辺	6 個
辺の長さ	$2\sqrt{2}$
面の中心	$\left(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}\right)$　(ただし，$+$ が奇数個)
	辺の長さが $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ の正四面体の頂点になる。
面のなす角	$\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \fallingdotseq 70.5°$

外接円半径	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$
一面の面積	$2\sqrt{3}$
外接球半径	$\sqrt{3}$
内接球半径	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
表面積	$8\sqrt{3}$
体積	$\frac{8}{3}$



1.1.2　正六面体

頂点　8 個　$(\pm1, \pm1, \pm1)$

$P_1(-1,-1,-1),\ P_2(-1,-1,+1),\ P_3(-1,+1,-1),\ P_4(-1,+1,+1),$

$P_5(+1,-1,-1),\ P_6(+1,-1,+1),\ P_7(+1,+1,-1),\ P_8(+1,+1,+1)$

面　6 個（正四角形）

$P_1P_2P_4P_3,\ P_1P_3P_7P_5,\ P_1P_5P_6P_2$

$P_8P_6P_5P_7,\ P_8P_4P_2P_6,\ P_8P_7P_3P_4$

辺　12 個

辺の長さ　2

面の中心　$(\pm1, 0, 0),\ (0, \pm1, 0),\ (0, 0, \pm1)$

辺の長さが $\sqrt{2}$ の正八面体の頂点になる。

面のなす角　$\cos^{-1}(0) = 90°$

外接円半径　$\sqrt{2}$

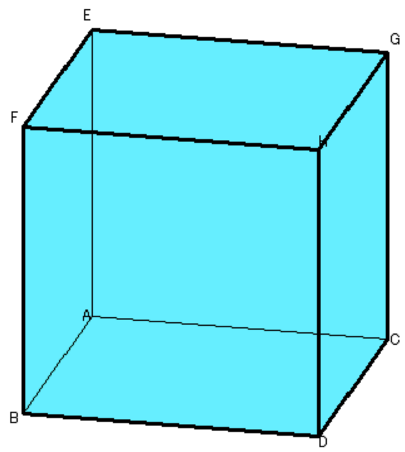
一面の面積　4

外接球半径　$\sqrt{3}$

内接球半径　1

表面積　24

体積　8



1.1.3　正八面体

頂点　　6 個　$(\pm1,0,0),\ (0,\pm1,0),\ (0,0,\pm1)$

$\mathrm{P}_1(-1,0,0),\ \mathrm{P}_2(0,-1,0),\ \mathrm{P}_3(0,0,-1),$

$\mathrm{P}_4(+1,0,0),\ \mathrm{P}_5(0,+1,0),\ \mathrm{P}_6(0,0,+1)$

面　　8 個（正三角形）

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3\mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_5\mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_6\mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_6,$

$\mathrm{P}_4\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3,\ \mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_5,\ \mathrm{P}_4\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6,\ \mathrm{P}_4\mathrm{P}_6\mathrm{P}_2$

辺　　12 個

辺の長さ　　$\sqrt{2}$

面の中心　　$\left(\pm\dfrac{1}{3},\pm\dfrac{1}{3},\pm\dfrac{1}{3}\right)$

辺の長さが$\dfrac{2}{3}$の正六面体の頂点になる。

面のなす角　　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right) \fallingdotseq 109.5^\circ$

外接円半径　　$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

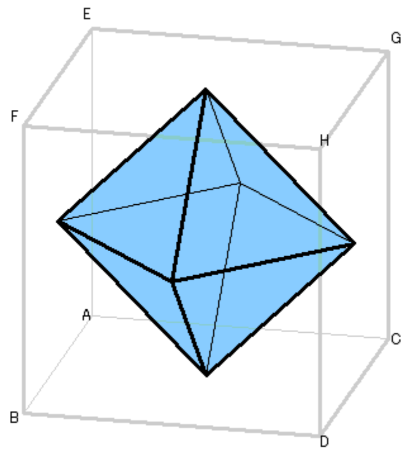
一面の面積　　$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

外接球半径　　1

内接球半径　　$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

表面積　　$4\sqrt{3}$

体積　　$\dfrac{4}{3}$



1.1.4　正十二面体

$\phi=$ 黄金比 $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおく。$\phi+1=\phi^2$，$\phi^2+1=\sqrt{5}\phi$ を用いて簡単に表す。

頂点　20 個　$(0,\pm1,\pm\phi^2)$, $(\pm1,\pm\phi^2,0)$, $(\pm\phi^2,0,\pm1)$, $(\pm\phi,\pm\phi,\pm\phi)$

$\mathrm{P}_1(0,-1,-\phi^2)$, $\mathrm{P}_2(0,+1,-\phi^2)$, $\mathrm{P}_3(0,-1,+\phi^2)$, $\mathrm{P}_4(0,+1,+\phi^2)$,

$\mathrm{P}_5(-1,-\phi^2,0)$, $\mathrm{P}_6(+1,-\phi^2,0)$, $\mathrm{P}_7(-1,+\phi^2,0)$, $\mathrm{P}_8(+1,+\phi^2,0)$,

$\mathrm{P}_9(-\phi^2,0,-1)$, $\mathrm{P}_{10}(-\phi^2,0,+1)$, $\mathrm{P}_{11}(+\phi^2,0,-1)$, $\mathrm{P}_{12}(+\phi^2,0,+1)$,

$\mathrm{P}_{13}(-\phi,-\phi,-\phi)$, $\mathrm{P}_{14}(-\phi,-\phi,+\phi)$, $\mathrm{P}_{15}(-\phi,+\phi,-\phi)$, $\mathrm{P}_{16}(-\phi,+\phi,+\phi)$,

$\mathrm{P}_{17}(+\phi,-\phi,-\phi)$, $\mathrm{P}_{18}(+\phi,-\phi,+\phi)$, $\mathrm{P}_{19}(+\phi,+\phi,-\phi)$, $\mathrm{P}_{20}(+\phi,+\phi,+\phi)$

面　12 個（正五角形）

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{19}\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{17}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{13}\mathrm{P}_9\mathrm{P}_{15}$, $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_{16}\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_{14}$, $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{18}\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{20}$,

$\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6\mathrm{P}_{18}\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{14}$, $\mathrm{P}_6\mathrm{P}_5\mathrm{P}_{13}\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{17}$, $\mathrm{P}_7\mathrm{P}_8\mathrm{P}_{19}\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{15}$, $\mathrm{P}_8\mathrm{P}_7\mathrm{P}_{16}\mathrm{P}_4\mathrm{P}_{20}$,

$\mathrm{P}_9\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_{16}\mathrm{P}_7\mathrm{P}_{15}$, $\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_9\mathrm{P}_{13}\mathrm{P}_5\mathrm{P}_{14}$, $\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{18}\mathrm{P}_6\mathrm{P}_{17}$, $\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{19}\mathrm{P}_8\mathrm{P}_{20}$

辺　30 個

辺の長さ　2

面の中心　$\left(0,\pm\dfrac{\phi^3}{\sqrt{5}},\pm\dfrac{\phi^2}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\pm\dfrac{\phi^2}{\sqrt{5}},0,\pm\dfrac{\phi^3}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(\pm\dfrac{\phi^3}{\sqrt{5}},\pm\dfrac{\phi^2}{\sqrt{5}},0\right)$

辺の長さが $\dfrac{2\phi^2}{\sqrt{5}}$ の正二十面体の頂点になる

面のなす角　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\fallingdotseq 116.6^\circ$

外接円半径　$2\sqrt{\dfrac{\phi}{\sqrt{5}}}=2\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}}$

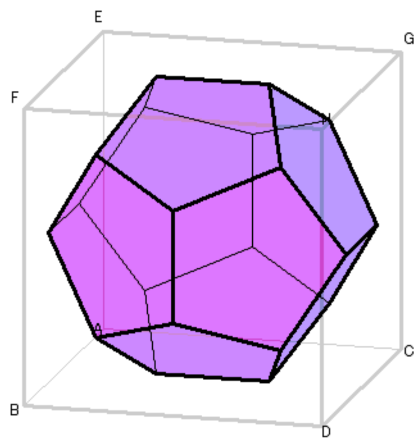
一面の面積　$\sqrt{\left(\sqrt{5}\phi\right)^3}=\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

外接球半径　$\sqrt{3}\phi=\dfrac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$

内接球半径　$\sqrt{\dfrac{\phi^5}{\sqrt{5}}}=\sqrt{\dfrac{25+11\sqrt{5}}{10}}$

表面積　$12\sqrt{\left(\sqrt{5}\phi\right)^3}=12\sqrt{25+10\sqrt{5}}$

体積　$4\sqrt{5}\phi^4=30+14\sqrt{5}$



1.1.5　正二十面体

$\phi=$ 黄金比 $=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ とおく。$\phi+1=\phi^2$, $\phi^2+1=\sqrt{5}\phi$ を用いて簡単に表す。

頂点　12 個　$(0,\pm1,\pm\phi)$, $(\pm\phi,0,\pm1)$, $(\pm1,\pm\phi,0)$

$\mathrm{P}_1(0,-1,-\phi)$, $\mathrm{P}_2(0,+1,-\phi)$, $\mathrm{P}_3(0,-1,+\phi)$, $\mathrm{P}_4(0,+1,+\phi)$,

$\mathrm{P}_5(-\phi,0,-1)$, $\mathrm{P}_6(-\phi,0,+1)$, $\mathrm{P}_7(+\phi,0,-1)$, $\mathrm{P}_8(+\phi,0,+1)$,

$\mathrm{P}_9(-1,-\phi,0)$, $\mathrm{P}_{10}(+1,-\phi,0)$, $\mathrm{P}_{11}(-1,+\phi,0)$, $\mathrm{P}_{12}(+1,+\phi,0)$,

面　20 個（正三角形）

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_7$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_1\mathrm{P}_5$, $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_6$, $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_3\mathrm{P}_8$,

$\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6\mathrm{P}_{11}$, $\mathrm{P}_6\mathrm{P}_5\mathrm{P}_9$, $\mathrm{P}_7\mathrm{P}_8\mathrm{P}_{10}$, $\mathrm{P}_8\mathrm{P}_7\mathrm{P}_{12}$,

$\mathrm{P}_9\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_3$, $\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_9\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_2$, $\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_4$,

$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_7\mathrm{P}_{10}$, $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_9\mathrm{P}_5$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5\mathrm{P}_{11}$, $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_{12}\mathrm{P}_7$,

$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_6\mathrm{P}_9$, $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_{10}\mathrm{P}_8$, $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_8\mathrm{P}_{12}$, $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_{11}\mathrm{P}_6$

辺　30 個

辺の長さ　2

面の中心　$\left(0,\pm\dfrac{\phi^3}{3},\pm\dfrac{\phi}{3}\right)$, $\left(\pm\dfrac{\phi}{3},0,\pm\dfrac{\phi^3}{3}\right)$, $\left(\pm\dfrac{\phi^3}{3},\pm\dfrac{\phi}{3},0\right)$, $\left(\pm\dfrac{\phi^2}{3},\pm\dfrac{\phi^2}{3},\pm\dfrac{\phi^2}{3}\right)$

辺の長さが $\dfrac{2\phi}{3}$ の正十二面体の頂点になる

面のなす角　$\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\fallingdotseq 138.2^\circ$

外接円半径　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

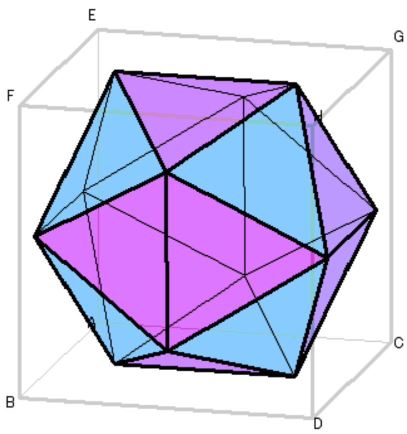
一面の面積　$\sqrt{3}$

外接球半径　$\sqrt{\sqrt{5}\,\phi}=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}$

内接球半径　$\dfrac{\phi^2}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{6}$

表面積　$20\sqrt{3}$

体積　$\dfrac{20\phi^2}{3}=\dfrac{10\left(3+\sqrt{5}\right)}{3}$

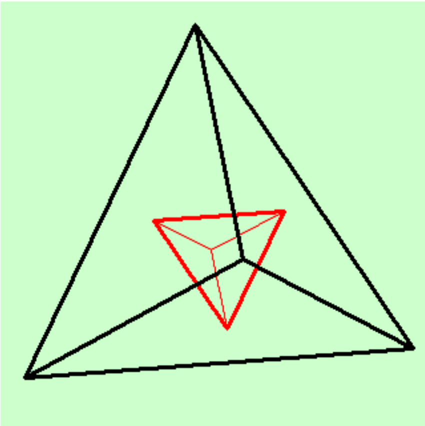


1.2　正多面体とその双対多面体

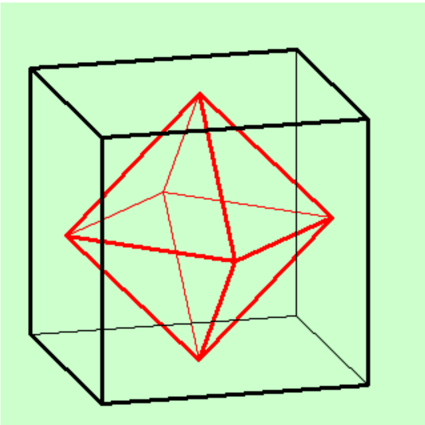
前節で調べたように，正多面体の各面の中心を頂点にもつ多面体はまた正多面体になる。これを元の正多面体の双対多面体という。このとき，大きさは関係なく，形だけを考える。

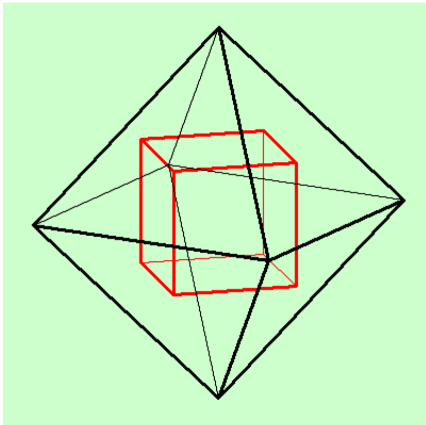
双対多面体の双対多面体は，元の正多面体である。

(1)　正四面体 $\overset{\text{双対}}{\Longleftrightarrow}$ 正四面体

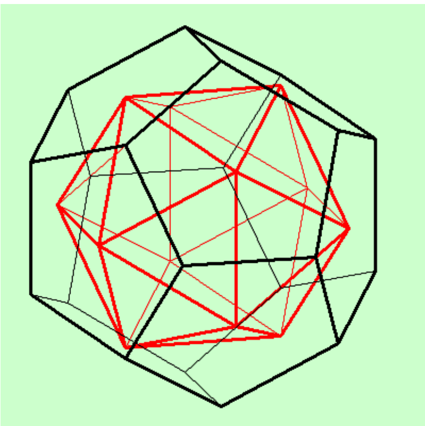


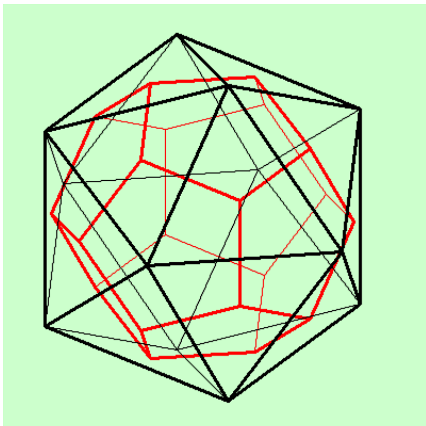
(2)　正六面体 $\overset{\text{双対}}{\Longleftrightarrow}$ 正八面体





(3)　正十二面体 $\overset{\text{双対}}{\Longleftrightarrow}$ 正二十面体





1.3 まとめ

一辺の長さ a で表す

	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
辺の長さ	a	a	a	a	a
外接円の半径	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,a$	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,a$
一面の面積	$\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$	$1\,a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}\,a^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$
外接球の半径 R	$\frac{\sqrt{6}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\,a$	$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{4}\,a$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\,a$
内接球の半径 r	$\frac{1}{2\sqrt{6}}\,a$	$\frac{1}{2}\,a$	$\frac{1}{\sqrt{6}}\,a$	$\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{40}}\,a$	$\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{15}}{12}\,a$
表面積 S	$\sqrt{3}\,a^2$	$6\,a^2$	$2\sqrt{3}\,a^2$	$3\sqrt{25+10\sqrt{5}}\,a^2$	$5\sqrt{3}\,a^2$
体積 V	$\frac{1}{6\sqrt{2}}\,a^3$	a^3	$\frac{\sqrt{2}}{3}\,a^3$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{4}\,a^3$	$\frac{\left(15+5\sqrt{5}\right)}{12}\,a^3$

外接球の半径 R で表す

	正 4 面体	正 6 面体	正 8 面体	正 12 面体	正 20 面体
辺の長さ a	$\frac{2\sqrt{6}}{3}\,R$	$\frac{2}{\sqrt{3}}\,R$	$\sqrt{2}\,R$	$\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{3}\,R$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{5}}\,R$
外接円の半径	$\frac{2\sqrt{2}}{3}\,R$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\,R$	$\frac{\sqrt{6}}{3}\,R$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\,R$	$\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{15}}\,R$
一面の面積	$\frac{2}{\sqrt{3}}\,R^2$	$\frac{4}{3}\,R^2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\,R^2$	$\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{6}\,R^2$	$\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{15}}{10}\,R^2$
外接球の半径	R	R	R	R	R
内接球の半径 r	$\frac{1}{3}\,R$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,R$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\,R$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,R$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{15}}\,R$
表面積 S	$\frac{8}{\sqrt{3}}\,R^2$	$8\,R^2$	$4\sqrt{3}\,R^2$	$2\sqrt{50-10\sqrt{5}}\,R^2$	$2(5\sqrt{3}-\sqrt{15})\,R^2$
体積 V	$\frac{8\sqrt{3}}{27}\,R^3$	$\frac{8\sqrt{3}}{9}\,R^3$	$\frac{4}{3}\,R^3$	$\frac{10\sqrt{3}+2\sqrt{15}}{9}\,R^3$	$\frac{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{3}\,R^3$