積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ の計算

$I(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ とおく。

$$\begin{aligned}
I(a)^2 &= \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx \int_{-a}^{a} e^{-y^2}\,dy \\
&= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right) e^{-y^2}\,dy \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\,dy \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy
\end{aligned}$$

これは，曲面 $z=g(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$ と xy 平面に挟まれた立体 $S:0\leqq z\leqq g(x,y)$ を，正方形 $D:-a\leqq x\leqq a,\ -a\leqq y\leqq a$ で垂直に切り取った部分の体積である。

正方形 D の内接円 $C_1: x^2+y^2\leqq a^2$ と外接円 $C_2: x^2+y^2\leqq 2a^2$ を考える。立体 S を，円 C_1，C_2 で垂直に切り取った部分の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると $V_1\leqq I(a)^2\leqq V_2$ が成り立つ。

$z=g(x,y)$ は $z=e^{-x^2}$ を z 軸のまわりに回転してできる回転面だから，V_1，V_2 は回転体の体積の公式を使って求められる。

$$\begin{aligned}
V_1 &= \int_0^{a} 2\pi x e^{-x^2}\,dx = \Big[\,-\pi e^{-x^2}\,\Big]_0^{a} = \pi\left(1-e^{-a^2}\right) \\
V_2 &= \int_0^{\sqrt{2}a} 2\pi x e^{-x^2}\,dx = \Big[\,-\pi e^{-x^2}\,\Big]_0^{\sqrt{2}a} = \pi\left(1-e^{-2a^2}\right)
\end{aligned}$$

ここで，$a\to\infty$ とすると

$$\begin{aligned}
&\lim_{a\to\infty} V_1 = \lim_{a\to\infty}\pi\left(1-e^{-a^2}\right)=\pi \\
&\lim_{a\to\infty} V_2 = \lim_{a\to\infty}\pi\left(1-e^{-2a^2}\right)=\pi \\
&\therefore\ \lim_{a\to\infty} I(a)^2=\pi
\end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} I(a)=\sqrt{\pi}$$