問題　n を正整数とする．

$$I_n = \int_0^1 x(\log x)^n \, dx$$

の値を n を用いて表しなさい．

注 1　$\log x$ が $x = 0$ で定義されないので，

$$\Big[\ F(x)\ \Big]_0^1 = F(1) - F(0)$$

ではなく

$$\Big[\ F(x)\ \Big]_0^1 = \lim_{x \to +0}(F(1) - F(x))$$

を計算します．

解答

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 \underbrace{x}_{u'}\underbrace{(\log x)^n}_{v} \, dx \\
&= \left[\ \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u}\underbrace{(\log x)^n}_{v}\ \right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{u}\underbrace{n(\log x)^{n-1}\frac{1}{x}}_{v'} \, dx \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x \to +0} x^2(\log x)^n}_{=0\ \text{注 2}} - \frac{n}{2}\int_0^1 x(\log x)^{n-1} \, dx \\
&= -\frac{n}{2} I_{n-1} \\
I_n &= \left(-\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n-1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}\right) I_0 \\
&= (-1)^n \frac{n!}{2^n}
\end{aligned}$$

注 2

$nt = -\log x$ とおくと，$x \to +0$ のとき $t \to \infty$

$$\left|x^2(\log x)^n\right| = \left|(e^{-nt})^2(-nt)^n\right| = \left(\frac{t}{e^t}\cdot\frac{n}{e^t}\right)^n < \left(\frac{n}{e^t}\right)^n \ \to\ 0$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to +0} x^2(\log x)^n = 0$$