四分位数

データを小さい順に並べたとき，それらを四等分する区切りの数を，小さい方から第一四分位数，第二四分位数，第三四分位数と呼ぶ。四分位数は，平均値や標準偏差のように複雑な計算をせずに，データの分布状況を調べるのに便利である。

n 個のデータ $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq x_n$ の四分位数を求める手順は，次の 2 ステップからなる。

(1) 四分位点 m_i $(i = 1, 2, 3)$ を計算する。

(2) m_i が整数のときは，当然 m_i 番目のデータ x_{m_i} を四分位数 Q_i とする。

m_i が小数になったときは，$L = \lfloor m_i \rfloor$ 番目のデータ x_L と，$H = \lceil m_i \rceil$ 番目のデータ x_H から Q_i を定める。

ただし，$\lfloor x \rfloor$, $\lceil x \rceil$ はそれぞれ x の小数部分を切り捨てた値，切り上げた値である。

ステップ 1 の「m_i の計算式」，ステップ 2 の「Q_i の定め方」が統一されておらず，下に紹介するように，書物，WEB サイト，統計ソフトによって様々である。当然，得られた値はそれぞれ微妙に異なる。しかし，データの分布状況を調べるという目的に対して悪影響をおよぼすほどの差異はない。特にデータが多数ある場合には全く問題はない。とは言っても，生徒たちが混乱しないように，指導上の注意が必要である。

方式 1. A(1)B(n) を四等分する

(1) 内分点の公式を用いて

$$m_1 = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot n}{4} = \frac{n+3}{4} \qquad m_2 = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot n}{4} = \frac{n+1}{2} \qquad m_3 = \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot n}{4} = \frac{3n+1}{4}$$

図を見るとわかるように，データの数 n の四等分ではなく，$n-1$ の四等分になっている。

(2) m_i が整数でないとき，x_L と x_H を小数部に従って比例配分した値を Q_i とする。

$$Q_i = (H - m_i)x_L + (m_i - L)x_H$$

たとえば，$m_i = 3.25$ のとき

$$Q_i = 0.75x_3 + 0.25x_4$$

表計算ソフト Excel の関数 QUARTILE はこの方式である。

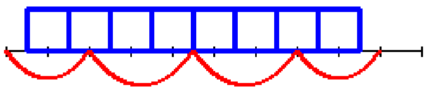
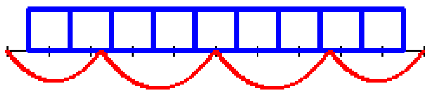
方式 2.　データの数 n を四等分する

(1)

$$m_1 = \frac{1n}{4} \qquad m_2 = \frac{2n}{4} \qquad m_3 = \frac{3n}{4}$$

中央値がずれてしまう。また，逆順に並べたときの四分位点ともずれてしまう。よって，つぎのように補正する。

$$m_1 = \frac{n}{4} \qquad m_2 = \frac{n+1}{2} \qquad m_3 = n+1-m_1$$

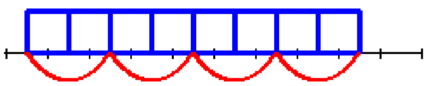
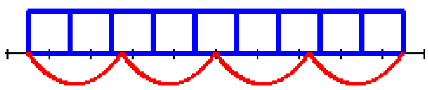
(2)　m_i が整数でないとき，単に x_L と x_H の平均を Q_i とする。

$$Q_i = \frac{x_L + x_H}{2}$$

方式 3.　番号 i を点ではなく $i-0.5$〜$i+0.5$ の区間と考える

(1)　A(0.5)B($n+0.5$) を四等分する。内分点の公式を用いて

$$m_1 = \frac{3\cdot 0.5 + 1(n+0.5)}{4} = \frac{1n+2}{4} \qquad m_2 = \frac{2\cdot 0.5 + 2(n+0.5)}{4} = \frac{2n+2}{4} \qquad m_3 = \frac{1\cdot 0.5 + 3(n+0.5)}{4} = \frac{3n+2}{4}$$

方式 (2) の補正前の値それぞれに $+0.5$ して補正したものとも考えられる。

(2)　m_i が整数でないとき Q_i をつぎのように定める。

$$Q_i = x_H \qquad (m_i\text{の小数部が }0.75\text{，すなわち }x_H - 0.5 < m_i\text{のとき})$$

$$Q_i = \frac{x_L + x_H}{2} \qquad (m_i\text{の小数部が }0.5\text{，すなわち }x_L + 0.5 = m_i = x_H - 0.5\text{ のとき})$$

$$Q_i = x_L \qquad (m_i\text{の小数部が }0.25\text{，すなわち }m_i < x_L + 0.5\text{ のとき})$$

最も合理的であるが，実際にはあまり使われていない。

注　以下の方式 4〜6 は，まず中央点 m_2 と中央値 Q_2 を求め，それから四分位点 m_1, m_3 と四分位数 Q_1, Q_3 を求める方式である。中央値は，次のように定める。

$$m_2 = \frac{1+n}{2}$$

$$Q_2 = \frac{x_L + x_H}{2} \qquad (m_2\text{が整数のとき，}x_L = x_H = x_{m_2}\text{である})$$

方式 4.　中央点以下，中央点以上の中央値

(1)　1〜m_i と m_i〜n の中央とする。

$$m_1 = \frac{1+m_2}{2} = \frac{n+3}{4} \qquad m_3 = \frac{m_2+n}{2} = \frac{3n+1}{4}$$

方式 1 と同じ値になる。分点の公式を使わないのでわかりやすい。

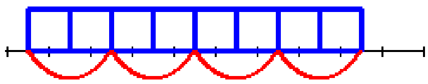
(2)

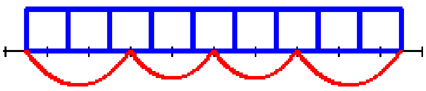
$$Q_i = \frac{x_L + x_H}{2}$$

方式 5.　中央点以下の整数，中央点以上の整数の中央値

(1)　1〜$\lfloor m_2 \rfloor$ と $\lceil m_2 \rceil$〜n の中央とする。

$$m_1 = \frac{1+\lfloor m_2 \rfloor}{2} \qquad m_3 = \frac{\lceil m_2 \rceil + n}{2}$$





(2)　小数部が 0.5 の小数しか現れないので，単純に平均をとるだけでよい。

$$Q_i = \frac{x_L + x_H}{2}$$

別名ヒンジとも呼ばれる。四分位数とは別物という人もいる。

方式 6.　中央点より小さい整数，中央点より大きい整数の中央値

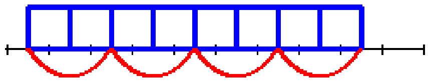
(1)　方式 5 と似ているが，必ず中央点を除外する。

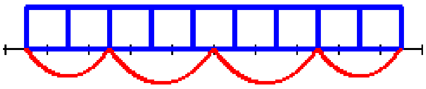
m_2 が整数のとき

$$m_1 = \frac{1+(m_2-1)}{2} \qquad m_3 = \frac{(m_2+1)+n}{2}$$

m_2 が整数でないとき

$$m_1 = \frac{1+\lfloor m_2 \rfloor}{2} \qquad m_3 = \frac{\lceil m_2 \rceil + n}{2}$$





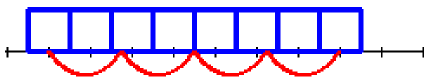
(2)　小数部が 0.5 の小数しか現れないので，単純に平均をとるだけでよい。

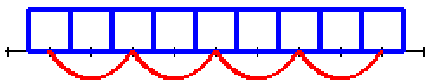
$$Q_i = \frac{x_L + x_H}{2}$$

比較

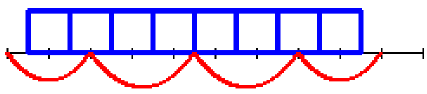
m_i の図を並べて見ると，微妙な違いがよくわかる。

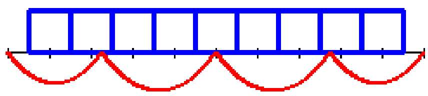
方式 1



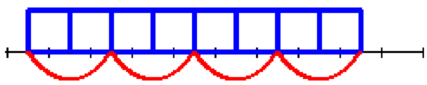


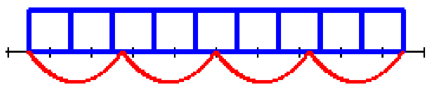
方式 2



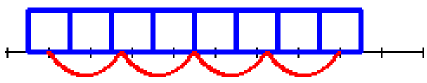


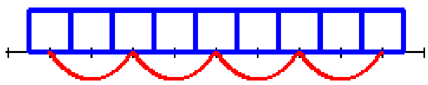
方式 3



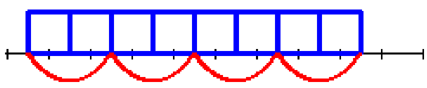


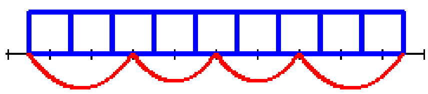
方式 4



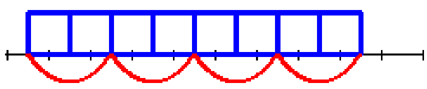


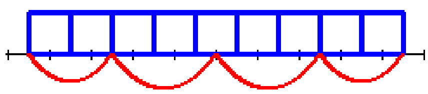
方式 5





方式 6





n を 4 で割った余りで場合分けして，Q_1, Q_3 を表すと次の表のようになる。

Q_1

n	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k-0$
方式 1	x_k	$\frac{3x_k+x_{k+1}}{4}$	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$	$\frac{x_k+3x_{k+1}}{4}$
方式 2	$\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$	$\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$	$\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$	x_k
方式 3	x_k	x_k	x_k	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$
方式 4	x_k	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$
方式 5	x_k	x_k	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$
方式 6	$\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$	x_k	x_k	$\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$

Q_3

n	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k-0$
方式 1	x_{3k-2}	$\frac{x_{3k-2}+3x_{3k-1}}{4}$	$\frac{x_{3k-1}+x_{3k}}{2}$	$\frac{3x_{3k}+x_{3k+1}}{4}$
方式 2	$\frac{x_{3k-2}+x_{3k-1}}{2}$	$\frac{x_{3k-1}+x_{3k}}{2}$	$\frac{x_{3k}+x_{3k+1}}{2}$	x_{3k+1}
方式 3	x_{3k-2}	x_{3k-1}	x_{3k}	$\frac{x_{3k}+x_{3k+1}}{2}$
方式 4	x_{3k-2}	$\frac{x_{3k-2}+x_{3k-1}}{2}$	$\frac{x_{3k-1}+x_{3k}}{2}$	$\frac{x_{3k}+x_{3k+1}}{2}$
方式 5	x_{3k-2}	x_{3k-1}	$\frac{x_{3k-1}+x_{3k}}{2}$	$\frac{x_{3k}+x_{3k+1}}{2}$
方式 6	$\frac{x_{3k-2}+x_{3k-1}}{2}$	x_{3k-1}	x_{3k}	$\frac{x_{3k}+x_{3k+1}}{2}$