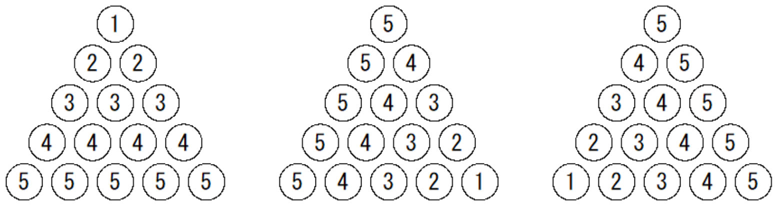
1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ の公式の導き方いろいろ

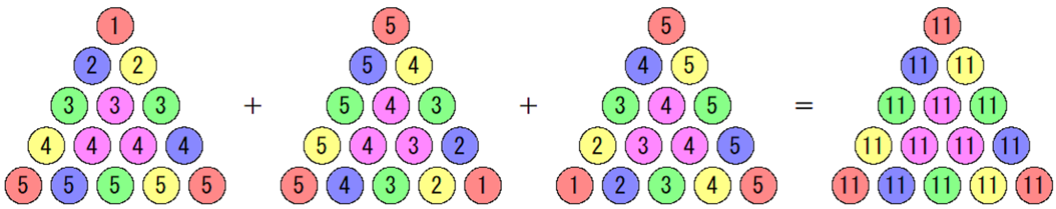
1.1 三角形状に並べた図を用いる方法

1 段目に 1 を 1 個，2 段目に 2 を 2 個，$\ldots$，5 段目に 5 を 5 個，正三角形の形に並べます．
数の和は，$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2$ です．
それを時計回りに 120° と 240° 回転したものも考えます．



そして，3 つの三角形の同じ位置にある数を足します．

$$1+5+5=11 \qquad 2+5+4=11 \qquad 3+5+3=11 \qquad 4+5+2=11 \qquad 3+4+4=11$$



どの位置の和もすべて 11 になります．
このことを式で表すと，次のようになります．

$$(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\times 3=(1+5+5)\times(1+2+3+4+5)$$

一般に，次のことが成り立ちます．

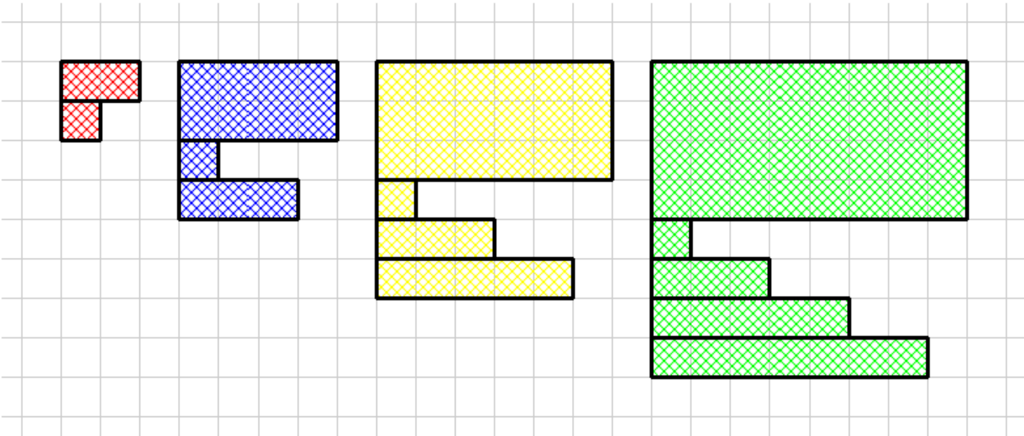
$$\begin{aligned}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\times 3 &= (2n+1)\times(1+2+3+\cdots+n)\\ &= (2n+1)\times\frac{1}{2}n(n+1)\\ \therefore\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

注 1.1 一般に，3 つの数の和がすべて $2n+1$ になる，ということは明らかでしょうか？

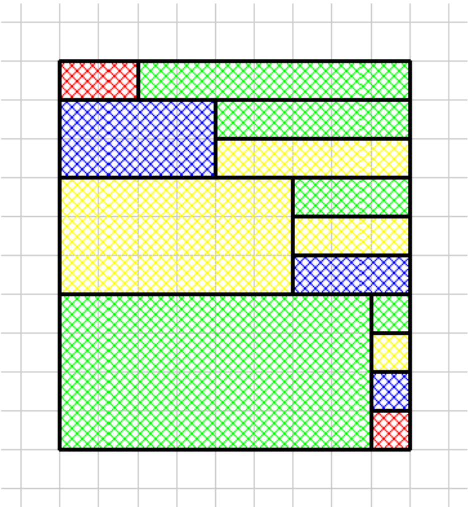
1.2　長方形を敷き詰める方法

方眼用紙などを用いて，次のような長方形を切り取ります．

1×2 と 1×1	$\cdots$面積は $1^2\times 3$
2×4 と 1×1 と 1×3	$\cdots$面積は $2^2\times 3$
3×6 と 1×1 と 1×3 と 1×5	$\cdots$面積は $3^2\times 3$
4×8 と 1×1 と 1×3 と 1×5 と 1×7	$\cdots$面積は $4^2\times 3$



これらを並べ替えて，次のような大きな長方形を作ることができます．



面積を比べて，次のことが分かります．

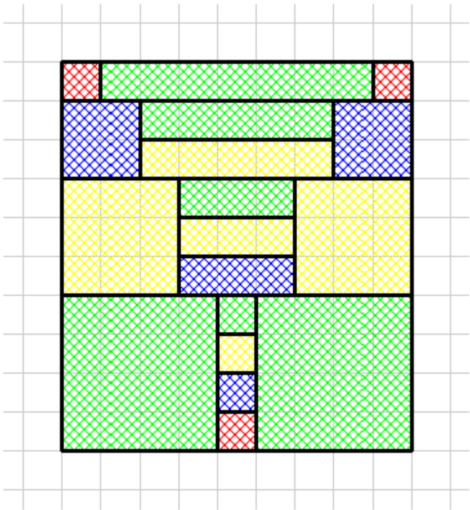
$$(1^2+2^2+3^2+4^2)\times 3=(1+2+3+4)\times(4\times 2+1)$$

一般に，次のことが成り立ちます．

$$\begin{aligned}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\times 3&=(1+2+3+\cdots+n)\times(2n+1)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)\times(2n+1)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

注 1.2 $k \times 2k$ の長方形を $k \times k$ の正方形 2 つに分けて，下図のように敷き詰めることもできます.



1.3　積み木で直方体を組み立てる方法

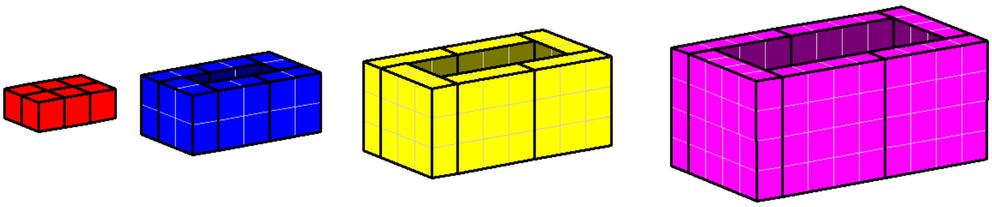
以下のように，体積が $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ の積み木を 6 個ずつ使います．

$1 \times 1 \times 1$ の積み木 6 個で，$2 \times 3 \times 1$ の直方体を作ります．

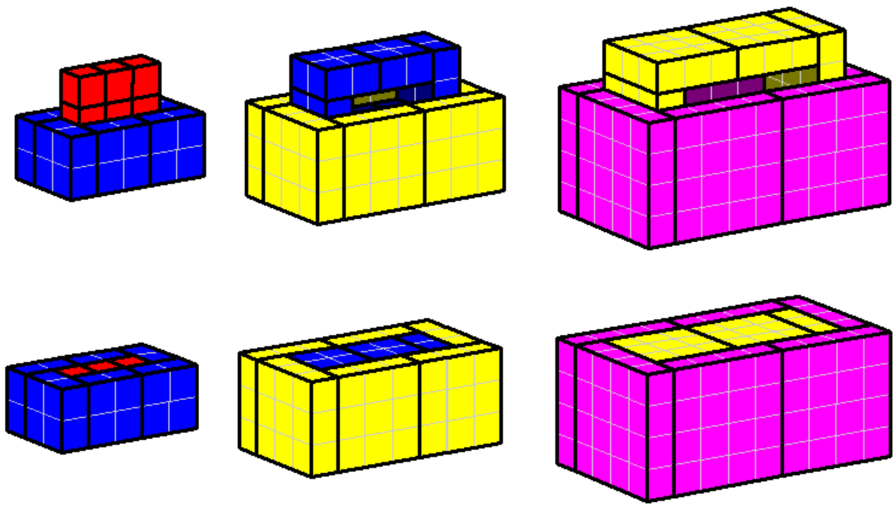
$1 \times 2 \times 2$ の積み木 6 個で，$3 \times 5 \times 2$ の直方体状の筒 (中空部分は，$1 \times 3 \times 2$) を作ります．

$1 \times 3 \times 3$ の積み木 6 個で，$4 \times 7 \times 3$ の直方体状の筒 (中空部分は，$2 \times 5 \times 3$) を作ります．

$1 \times 4 \times 4$ の積み木 6 個で，$5 \times 9 \times 4$ の直方体状の筒 (中空部分は，$3 \times 7 \times 4$) を作ります．



一回り小さい方を回転すると，次の筒にすっぽりおさまります．



体積から，次のことが分かります．

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) \times 6 = 5 \times 9 \times 4$$

一般に，次のことが成り立ちます．

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \times 6 = (n+1) \times (2n+1) \times n$$

$$\therefore \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

1.4 $(k+1)^3$ を展開した式を用いる方法

$(k+1)^3$ を展開すると，次のようになります.

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$ について書き並べます.

$$\begin{aligned}
1^3 &= & & & 1 \\
2^3 &= 1^3 & +3 \times 1^2 & & +4 \\
3^3 &= 2^3 & +3 \times 2^2 & & +7 \\
&\vdots \\
(n+1)^3 &= n^3 & +3 \times n^2 & & +(3n+1)
\end{aligned}$$

辺々足し合わせる (両辺に共通の $1^3, 2^3, \ldots, n^3$ を相殺する) と

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= 3 \times (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1 + 4 + 7 + \cdots + (3n+1)) \\
&= 3 \times (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + \frac{1}{2}(n+1)(3n+2)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 &= \frac{1}{6}(n+1)\left(2(n+1)^2 - (3n+2)\right) \\
&= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n) \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}$$