相加・相乗平均の対数を用いた証明

定理 1　n 変数の相加・相乗平均の関係

n 個の正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について

$$\underbrace{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}}_{\text{相加平均}} \geqq \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}}_{\text{相乗平均}}$$

ここで，等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る

注 1

相加平均 a は，$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{ 個}} = x_1+x_2+\cdots+x_n$を満たす数である。

相乗平均 g は，$\underbrace{g \cdot g \cdot \cdots \cdot g}_{n\text{ 個}} = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$を満たす数である。

証明　自然対数 $\log x$ は単調増加だから，

$$\log \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \log \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$$

すなわち

$$\log \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}$$

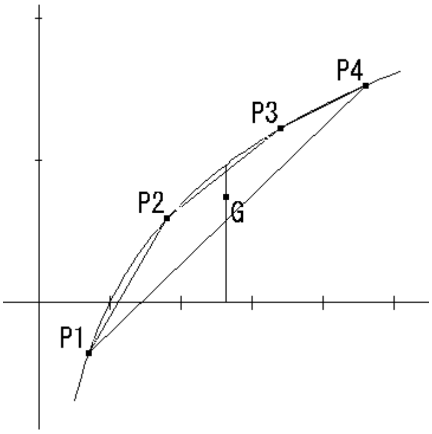
を示せばよい．

$$X = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$
$$Y = \frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}$$

とおく．

n 個の点 $\mathrm{P}_1(x_1, \log x_1), \mathrm{P}_2(x_2, \log x_2), \ldots, \mathrm{P}_n(x_n, \log y_n)$ の重心 G が (X, Y) である．

C : $y = \log x$ は上に凸であるから，G は C より下方にある．



$$\log X \geqq Y$$

すなわち

$$\log \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqq \frac{\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n}{n}$$

等号が成り立つ，すなわち G が C 上に乗るのは，すべての P_k が一致する $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る．

この証明を見ると，単純な平均 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ に限らず，加重平均 $\dfrac{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ でも成り立つことがわかる．

定理 2　n 変数の相加・相乗平均の関係の拡張

n 個の正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と和が 1 の n 個の正の数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ について

$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n \geqq x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots x_n^{\alpha_n}$

ここで，等号が成り立つのは $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のときに限る