# 相加・相乗平均の拡張

**定理 1**　$n$ 変数の相加・相乗平均の関係

$n$ 個の正の数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について

$$\underbrace{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}}_{\text{相加平均}} \geqq \underbrace{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}}_{\text{相乗平均}}$$

ここで，等号が成り立つのは $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに限る

**注 1**

相加平均 $a$ は, $\underbrace{a + a + \cdots + a}_{n \text{ 個}} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ を満たす数である。

相乗平均 $g$ は, $\underbrace{g \cdot g \cdot \cdots \cdot g}_{n \text{ 個}} = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$ を満たす数である。

3 変数 $x, y, z$ の場合

相加平均： $a + a + a = x + y + z$

相乗平均： $g \cdot g \cdot g = x \cdot y \cdot z$

この中間の平均 $m$ も考えられる。

$$m \cdot m + m \cdot m + m \cdot m = x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$$

すなわち

$$m = \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}}$$

**定理 2**　**3 変数の相加・相乗平均の拡張の関係**

3 個の正の数 $x, y, z$ について

$$\frac{x + y + z}{3} \geqq \sqrt{\frac{xy + yz + zx}{3}} \geqq \sqrt[3]{xyz}$$

ここで，等号が成り立つのは $x = y = z$ のときに限る

証明　$a=\dfrac{x+y+z}{3}$, $b=\sqrt{\dfrac{xy+yz+zx}{3}}$, $c=\sqrt[3]{xyz}$ とおく。

(1)　$b \geqq c$

3 変数の相加・相乗平均の関係より

$$b^2=\frac{xy+yz+zx}{3} \geqq \sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}=\sqrt[3]{(xyz)^2}=c^2$$

$$\therefore\ b \geqq c$$

等号が成り立つのは，次のときに限る。

$$xy=yz=zx$$

$$\therefore\ x=y=z$$

(2)　$a \geqq b$

$$\begin{aligned}9(a^2-b^2)&=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\\&=\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\\&=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right)\geqq 0\end{aligned}$$

$$\therefore\ a^2 \geqq b^2$$

$$a \geqq b$$

等号が成り立つのは，次のときに限る。

$$x-y=y-z=z-x=0$$

$$\therefore\ x=y=z$$

(2) の別証明

$t$ の 3 次方程式

$$f(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-3at^2+3b^2t-c^3=0$$

が (重複を含めて)3 つの実数解 $x,y,z$ をもつから，$t$ の 2 次方程式

$$f'(t)=3(t^2-2at+b^2)=0$$

が (重複を含めて)2 つの実数解をもつ。
判別式より

$$a^2-b^2 \geqq 0$$

$$\therefore\ a \geqq b$$

等号が成り立つのは，次のときに限る。

$f'(t)=0$ の解は 2 重解である

$f(t)=0$ の解は 3 重解である

$$\therefore\ x=y=z$$

**定義 1**　$n$ 個の正の数 $X$： $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と，自然数 $k(1 \leqq k \leqq n)$ について，次のように定義する。

(1)　$k$ **項積総和**　$S_{X,k} = \displaystyle\sum_{1 \leqq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \cdots \cdot x_{i_k}$　（${}_n\mathrm{C}_k$ 個の和）

(2)　$k$ **項積平均**　$A_{X,k} = \sqrt[k]{\dfrac{S_{X,k}}{{}_n\mathrm{C}_k}}$

**注 2**　$A_{X,1}$ が相加平均，$A_{X,n}$ が相乗平均である。

> **定理 3　相加・相乗平均の拡張の関係**
>
> $n$ 個の正の数 $X$： $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について，
>
> $A_{X,1} \geqq A_{X,2} \geqq \cdots \geqq A_{X,n-1} \geqq A_{X,n}$
> ここで，等号が成り立つのは，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$のときに限る。

**注 3**　等号が 1 つでも成り立つと，すべての等号が成り立つ。

**証明**　$n$ に関する数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 2$ のとき

目的：　$A_{X,1} \geqq A_{X,2}$

これは，2 変数の相加・相乗平均の関係そのものである。

(ii)　$n > 2$ のとき

仮定：　任意の $n-1$ 個の正の数 $Y$： $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ について

$$A_{Y,1} \geqq A_{Y,2} \geqq \cdots \geqq A_{Y,n-1}$$

目的：　$n$ 個の正の数 $X$： $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について

$$A_{X,1} \geqq A_{X,2} \geqq \cdots \geqq A_{X,n-1} \geqq A_{X,n}$$

(1)　$A_{X,n-1} \geqq A_{X,n}$

$n$ 変数の相加・相乗平均の関係より

$$\begin{aligned} A_{X,n-1}^{n-1} &= \frac{\overbrace{x_2 x_3 \ldots x_n}^{x_1\text{以外}} + \overbrace{x_1 x_3 \ldots x_n}^{x_2\text{以外}} + \cdots + \overbrace{x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1}}^{x_n\text{以外}}}{n} \\ &\geqq \sqrt[n]{(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n)^{n-1}} \\ &= A_{X,n}^{n-1} \end{aligned}$$

$\therefore\ A_{X,n-1} \geqq A_{X,n}$

等号が成り立つのは，次のときに限る。

$$x_2x_3\dots x_n = x_1x_3\dots x_n = \cdots = x_1x_2x_3\dots x_{n-1}$$
$$\therefore\ x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$$

(2) $A_{X,1} \geqq A_{X,2} \geqq \cdots \geqq A_{X,n-1}$

$f(t) = (t-x_1)(t-x_2)\dots(t-x_n)$ とおく。

$$\begin{aligned} f(t) &= t^n - S_{X,1}t^{n-1} + S_{X,2}t^{n-2} - S_{X,3}t^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}S_{X,n-1}t + (-1)^nS_{X,n} \\ &= t^n - nA_{X,1}t^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2A_{X,2}^2t^{n-2} - {}_n\mathrm{C}_3A_{X,3}^3t^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}nA_{X,n-1}^{n-1}t + (-1)^nA_{X,n}^n \end{aligned}$$
$$f'(t) = n\left(t^{n-1} - (n-1)A_{X,1}t^{n-2} + {}_{n-1}\mathrm{C}_2A_{X,2}^2t^{n-3} - {}_{n-1}\mathrm{C}_3A_{X,3}^3t^{n-4} + \cdots + (-1)^{n-1}A_{X,n-1}^{n-1}\right)$$

$f(t) = 0$ が（重複も含めて）$n$ 個の実数解 $x_1, x_2, \dots, x_n$ をもつから，
$f'(t) = 0$ は（重複を含めて） $n-1$ 個の実数解をもつ。
この解を $Y = y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ とすると

$$\begin{aligned} f'(t) &= n(t-y_1)(t-y_2)\dots(t-y_n) \\ &= n\left(t^{n-1} - (n-1)A_{Y,1}t^{n-2} + {}_{n-1}\mathrm{C}_2A_{Y,2}^2t^{n-3} - {}_{n-1}\mathrm{C}_3A_{Y,3}^3t^{n-4} + \cdots + (-1)^{n-1}A_{Y,n-1}^{n-1}\right) \end{aligned}$$
$$\therefore\ A_{Y,1} = A_{X,1},\ A_{Y,2} = A_{X,2},\ \dots,\ A_{Y,n-1} = A_{X,n-1}$$

仮定より

$$A_{X,1} \geqq A_{X,2} \geqq \cdots \geqq A_{X,n-1}$$

等号が成り立つのは，次のときに限る。

$y_1 = y_2 = \cdots = y_{n-1}$

$f'(t) =$ の解は $n-1$ 重解である

$f(t) = 0$ の解は $n$ 重解である

$\therefore\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

**注 4** $n$ 次方程式 $f(t) = 0$ が $n$ 個の実数解

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \cdots \leqq x_{n-1} \leqq x_n$$

をもつとき，$n-1$ 次方程式 $f'(t) = 0$ は

$$x_1 \leqq y_1 \leqq x_2 \leqq y_2 \leqq x_3 \dots x_{n-1} \leqq y_{n-1} \leqq x_n$$

となる $n-1$ 個の実数解 $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ をもつ。