質問

つぎの問題を教えて下さい．

> $n \times n$ マスの正方形 ABCD において対角線 AC に交わる長方形（正方形を含む）はいくつあるか？

回答

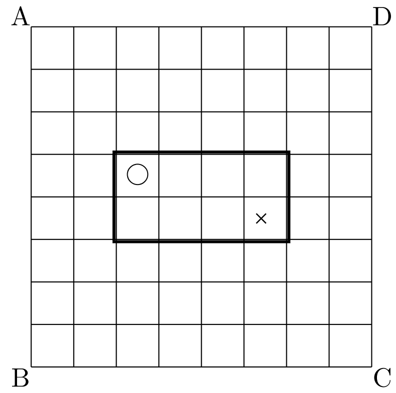
(1) すべての長方形

まず対角線と交わる条件なしで，すべての長方形を数えてみます．

その 1　長方形の縦の線の選び方：${}_n\mathrm{C}_2$ 通り

長方形の横の線の選び方：${}_n\mathrm{C}_2$ 通り

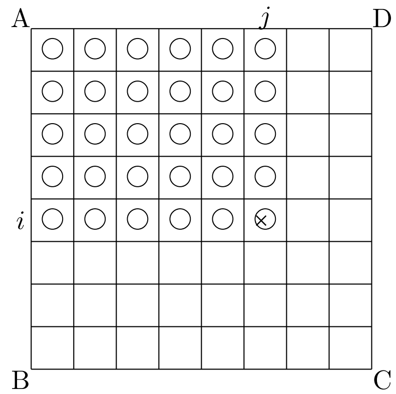
ゆえに，$\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \dfrac{n^2(n-1)^2}{4}$ 個



その 2　長方形の，左上のマス（○印）と右下のマス（×印）に注目する．

×マスが i 行 j 列 にあるとき，○マスは×マスより左上すなわち，i 行以下 j 列以下 にある．よって，$i \cdot j$ 通りある．

全部で



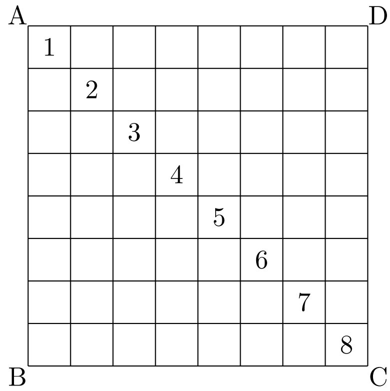
$$
\begin{aligned}
&1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot n \\
&+2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + \cdots + 2 \cdot n \\
&+\cdots \\
&+n \cdot 1 + n \cdot 2 + \cdots + n \cdot n \\
&=(1+2+\cdots+n)(1+2+\cdots+n) \\
&=\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} \text{個}
\end{aligned}
$$

数列の単元で学ぶ $\sum$ を使って書くと

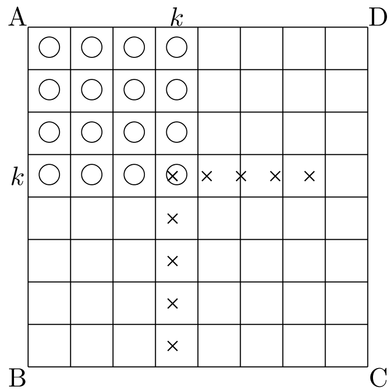
$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i \cdot j &= \sum_{i=1}^{n} i \ \sum_{j=1}^{n} j \\
&= \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4} \text{個}
\end{aligned}
$$

(2) 対角線 AC と交わる長方形

対角線 AC と交わる，すなわち $\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots, \boxed{\mathrm{n}}$ を少なくとも 1 つ含む長方形を数えます.



$\boxed{k}$ を含み，$\boxed{i}$ $(i > k)$ を含まない長方形は，右下のマスが $\boxed{k}$ の真下または真右にあって，左上のマスが $\boxed{k}$ より左上にある.
ゆえに，$(2n-2k+1)k^2$ 通り.
全部で



$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(2n-2k+1)k^2 \\
=&(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2 - 2\sum_{k=1}^{n}k^3 \\
=&(2n+1)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
=&\frac{n(n+1)\left((2n+1)^2-3n(n+1)\right)}{6} \\
=&\frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6} \text{ 個}
\end{aligned}
$$

(3) 対角線より下にある長方形

おまけとして，対角線より下にある長方形の数を直接求めます．

×マスが i 行 j 列 にあるとき，○マスは，$j+1$〜i 行，1〜j 列 になるので，$(i-j)j$ 通り．

全部で

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}(i-j)j \\
=&\sum_{i=2}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{i-1}j-\sum_{j=1}^{i-1}j^2\right) \\
=&\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i^2(i-1)}{2}-\frac{(i-1)i(2i-1)}{6}\right) \\
=&\sum_{i=2}^{n}\frac{(i-1)i(i+1)}{6} \\
=&\sum_{i=2}^{n}\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)-(i-2)(i-1)i(i+1)}{24} \\
=&\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}\ \text{個}
\end{aligned}
$$