質問

以下の問題を解説していただきたいです．

初項 a，公差 $d \neq 0$ の等差数列 $\{a_n\}$ について，つぎの命題 P は命題 Q の何条件かしらべなさい．

P ： $\dfrac{a}{d}$ が有理数である．

Q ： $\{a_n\}$ から無限等比数列が選び出せる．

回答

十分性：$P \to Q$ と，必要性：$Q \to P$ それぞれ，証明するか，反例を挙げるかします．

解答

(1) **必要性:** $Q \to P$

実は，3 項の等比数列を含んでいれば，$\dfrac{a}{d}$ は有理数である．

$$a_{i+1} = a + id$$
$$a_{j+1} = a + jd$$
$$a_{k+1} = a + kd$$

が等比数列になっているとする $(i < j < k)$．

$$\begin{aligned}
0 &= a_{j+1}^2 - a_{i+1}a_{k+1} \\
&= (a + jd)^2 - (a + id)(a + kd) \\
&= ad(2j - i - k) + d^2(j^2 - ik) \\
&= d(a(2j - i - k) + d(j^2 - ik))
\end{aligned}$$

$2j - i - k = 0$ とすると

$j^2 - ik = 0$

i, j, k は等差数列かつ等比数列

$\therefore\ i = j = k$

よって，$2j - i - k \neq 0$．
ゆえに

$$\frac{a}{d} = \frac{-j^2 + ik}{2j - i - k} \ \text{：有理数}$$

(2) **十分性:** $P \to Q$

$\dfrac{a}{d} = \dfrac{q}{p}$ (p : 自然数, q : 整数) とする．

$$
\begin{aligned}
a_{n+1}(1+p) &= (a+nd)(1+p) \\
&= a + pa + (1+p)nd \\
&= a + qd + (1+p)nd \\
&= a + ((1+p)n + q)d \\
&= a_{(1+p)n+q-1}
\end{aligned}
$$

ゆえに，数列 $\{n_i\}$ を

$$
\begin{aligned}
&n_1 = 1 \\
&n_{i+1} = (1+p)n_i + q - 1 \quad (i = 1, 2, \ldots)
\end{aligned}
$$

で定めると，部分列 $\{a_{n_i}\}$ が公比 $1+p$ の等比数列である．

したがって，P は Q の必要十分条件である．